

# ANNALES

DE LA

## SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

ASSOCIATION SANS BUT LUCRATIF

TOME SOIXANTE-ET-UNIÈME, 1947

SÉRIE I

SCIENCES MATHÉMATIQUES, ASTRONOMIQUES  
ET PHYSIQUES

TROISIÈME ET DERNIER FASCICULE

TABLES

12 DÉCEMBRE 1947



*Publié avec le concours de la Fondation universitaire de Belgique*

LOUVAIN

Secrétariat de la Société Scientifique

11, RUE DES RÉCOLLETS, 11

Chèques postaux 2027.46

1947

Publication trimestrielle. Prix de ce fascicule séparé : 35 frs

# TABLE DES MATIÈRES

PAGES

Session du jeudi 30 octobre 1947, à Louvain.

<b>PREMIÈRE SECTION : Sciences mathématiques et astronomiques</b>	185
Sur une méthode d'approximations successives pour l'intégration des systèmes normaux d'équations intégrales, par M. R. H. J. Germa	185
Sur les équations intégrales dont le noyau est une fonction $K_n$ de Bessel, par M. Louis Poli.	191
Équations intégrales et équations fonctionnelles, par M. M. Parodi	198
Sur un théorème d'existence et d'unicité de l'intégrale d'une équation différentielle linéaire, par M. Félix Alardin	205
Sur le premier point de Lemoine du tétraèdre, par M. V. Thébault	215
Anneaux finis ; systèmes hypercomplexes de rang trois sur un corps commutatif, par M. Robert Ballieu	222
Sur la récession des nébuleuses extra-galactiques, par M. P. Drumaux	228
Les définitions dans l'Ancienne Sphérique, par M. J. Mogenet	235
<b>DEUXIÈME SECTION : Physique et Chimie</b>	242
Sur la précision et l'emploi des filtres colorés et spécialement sur les filtres en gélatine, par M. A. Biot	242
Note sur la mesure de l'activité de préparations radio-actives, par MM. G. Guéhen, J. Govaerts et A. D. Stoppani	250
Azéotropes d'esters et d'oxydes, par M. Maurice Lecat	255

Le prix d'ABONNEMENT aux ANNALES, série I, pour des personnes ne faisant pas partie de la Société scientifique est fixé comme suit :

<i>en Belgique, au Congo-Belge et au Luxembourg</i>	70 fr.
<i>dans les autres pays</i>	120 fr.



SESSION DU JEUDI 30 OCTOBRE 1947  
A LOUVAIN

Première Section

Sciences mathématiques et astronomiques

Sur une méthode d'approximations successives  
pour l'intégration des systèmes normaux  
d'équations intégral-différentielles

PAR

**R. H. GERMAY,**

*professeur à l'Université de Liège.*

§ 1. Nous avons récemment étendu à des systèmes normaux d'équations différentielles <sup>(1)</sup> une méthode d'approximations successives imaginée par le Général Céressia pour l'intégration des systèmes linéaires d'équations différentielles <sup>(2)</sup>.

Nous référant à des articles antérieurs, relatifs aux équations intégral-différentielles normales <sup>(3)</sup>, nous nous proposons de montrer comment la méthode du Général Céressia s'applique à des systèmes normaux de pareilles équations.

§ 2. Pour fixer les idées et limiter la complication des écritures, considérons un système de trois équations intégral-différentielles normales

---

<sup>(1)</sup> R. H. GERMAY : Remarque sur une méthode d'approximations successives pour l'intégration des systèmes linéaires d'équations différentielles : extension à des systèmes normaux de forme générale (*Bull. Soc. Roy. des Sciences de Liège*, 1947, pp. 119-125).

<sup>(2)</sup> GÉNÉRAL ED. CÉRESSIA : Méthode d'approximations successives pour l'intégration des systèmes linéaires d'équations différentielles (*Bull. Soc. Roy. des Sciences de Liège*, 1947, pp. 84-93).

<sup>(3)</sup> R. H. GERMAY : Sur une équation intégral-différentielle normale et sur une généralisation d'un théorème de Lindelöf (*Id.*, 1932, pp. 233-238). —

Application de la méthode des approximations successives au calcul de l'intégrale d'une équation intégral-différentielle (*Id.*, 1933, pp. 51-57). —

Sur l'existence des solutions de certaines équations intégral-différentielles à une variable indépendante et sur une généralisation de théorèmes de Lindelöf et de H. Poincaré (*Revista matematica hispano-americana*, 1933).

$$(1) \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = F_1(x; y_1, y_2, y_3; u_{11}, u_{12}, u_{13}), \\ \frac{dy_2}{dx} = F_2(x; y_1, y_2, y_3; u_{21}, u_{22}, u_{23}), \\ \frac{dy_3}{dx} = F_3(x; y_1, y_2, y_3; u_{31}, u_{32}, u_{33}), \end{cases}$$

où nous avons posé, pour abrégér,

$$(2) \quad u_{jr} = \int_{x_0}^x f_{jr}[x, s; y_1(s), y_2(s), y_3(s)] ds, \quad (j, r = 1, 2, 3),$$

et où  $y_1, y_2, y_3$ , désignent des fonctions inconnues de la variable indépendante  $x$ .

Supposons que les fonctions  $F_j$  soient continues dans le champ de variation

$$(3) \begin{cases} x_0 \leq x \leq x_0 + a, \quad y_j^0 - b_j \leq y_j \leq y_j^0 + b_j, \quad -c_{jr} < u_{jr} < c_{jr}, \\ (j, r = 1, 2, 3), \end{cases}$$

les lettres  $a, b_j, c_{jr}$  désignant des nombres positifs fixes.

Supposons aussi que les fonctions  $f_{jr}$  soient continues dans le champ de variation

$$(4) \begin{cases} x_0 \leq x \leq x_0 + a, \quad x_0 \leq s \leq x \leq a, \quad y_j^0 - b_j \leq y_j \leq y_j^0 + b_j, \\ (j = 1, 2, 3). \end{cases}$$

Admettons que les fonctions  $F_j$  satisfassent à des conditions de Lipschitz

$$(5) \begin{cases} |F_j(x; y_1, y_2, y_3, u_{j1}, u_{j2}, u_{j3}) - F_j(x; y_1^*, y_2^*, y_3^*, u_{j1}^*, u_{j2}^*, u_{j3}^*)| \\ < L_{j1} |y_1 - y_1^*| + L_{j2} |y_2 - y_2^*| + L_{j3} |y_3 - y_3^*| \\ + K_{j1} |u_{j1} - u_{j1}^*| + K_{j2} |u_{j2} - u_{j2}^*| + K_{j3} |u_{j3} - u_{j3}^*|, \quad (j=1, 2, 3), \end{cases}$$

quand les valeurs de

$$x, y_1, y_2, y_3, u_{j1}, u_{j2}, u_{j3}, \\ y_1^*, y_2^*, y_3^*, u_{j1}^*, u_{j2}^*, u_{j3}^*$$

appartiennent au champ de variation (3).

De même, supposons que les fonctions  $f_{jr}$  vérifient les conditions de Lipschitz

$$(6) \begin{cases} |f_{jr}(x, s; y_1, y_2, y_3) - f_{jr}(x, s; y_1^*, y_2^*, y_3^*)| \\ < H_{jr}^{(1)} |y_1 - y_1^*| + H_{jr}^{(2)} |y_2 - y_2^*| + H_{jr}^{(3)} |y_3 - y_3^*|, \quad (j, r = 1, 2, 3), \end{cases}$$



lorsque

$$x, s, y_1, y_2, y_3, y_1^*, y_2^*, y_3^*$$

appartiennent au champ de variation (4).

### § 3. CHOIX D'UN INTERVALLE DE VARIATION DE $x$ .

Désignons par  $M_j$  un nombre positif fixe au moins égal à la borne supérieure du module de la fonction  $F_j$  dans le champ de variation (3).

Représentons par  $m_{j1}, m_{j2}, m_{j3}$  des nombres positifs fixes au moins égaux aux bornes supérieures respectives des modules des fonctions  $f_{j1}, f_{j2}, f_{j3}$  dans le champ de variation (4).

Considérons les nombres positifs

$$a, \frac{c_{j1}}{m_{j1}}, \frac{c_{j2}}{m_{j2}}, \frac{c_{j3}}{m_{j3}}, (j=1, 2, 3),$$

$$\frac{b_1}{M_1}, \frac{b_2}{M_2}, \frac{b_3}{M_3}$$

et désignons par  $h$  le plus petit d'entre eux.

Nous savons que dans l'intervalle  $(x_0, x_0 + h)$ , les équations (1) admettent un et un seul système de solutions  $y_1, y_2, y_3$ , fonctions continues de  $x$  se réduisant respectivement à  $y_1^0, y_2^0, y_3^0$  pour  $x = x_0$  (\*).

Dans tout ce qui suit, nous supposons que  $x$  varie dans l'intervalle  $(x_0, x_0 + h)$ , c'est-à-dire que

$$(7) \quad x_0 \leq x \leq x_0 + h.$$

### § 4. CONSTRUCTION DE TROIS SUITES INDÉFINIES DE FONCTIONS.

Posons

$$(8) \quad \begin{cases} u_{1,1}^{(1)}(x) = \int_{x_0}^x f_{11}(x, s; y_1^0, y_2^0, y_3^0) ds, \\ u_{1,2}(x) = \int_{x_0}^x f_{12}(x, s; y_1^0, y_2^0, y_3^0) ds, \\ u_{1,3}(x) = \int_{x_0}^x f_{13}(x, s; y_1^0, y_2^0, y_3^0) ds. \end{cases}$$

Pour les valeurs de  $x$  satisfaisant à la relation (7), ces symboles ont effectivement un sens. Les fonctions  $u_{11}(x), u_{12}(x), u_{13}(x)$  sont, en module, respectivement inférieures aux nombres  $c_{11}, c_{12}, c_{13}$  et peuvent être introduites sous le signe fonctionnel  $F_1$ .

Nous pouvons ainsi écrire

$$(9) \quad y_{1,1}(x) = y_1^0 + \int_{x_0}^x F_1[t, y_1^0, y_2^0, y_3^0, u_{11}(t), u_{12}(t), u_{13}(t)] dt.$$

---

(\*) Voir les articles repris sous le n° (3) de la note ci-dessus.

La fonction  $y_{11}(x)$  est continue ; elle se réduit à  $y_1^o$  pour  $x = x_o$  ; elle donne lieu à la relation

$$(10) \quad |y_{11}(x) - y_1^o| < b_1$$

et peut être introduite sous les signes fonctionnels  $f_{j1}, f_{j2}, f_{j3}, (j=1, 2, 3)$  ; elle peut de même figurer sous les signes fonctionnels  $F_1, F_2, F_3$ .

Ecrivons ensuite

$$(11) \quad \begin{cases} u_{2,1}^{(1)}(x) = \int_{x_o}^x f_{21}[x, s; y_{11}(s), y_2^o, y_3^o] ds, \\ u_{2,2}^{(1)}(x) = \int_{x_o}^x f_{22}[x, s; y_{11}(s), y_2^o, y_3^o] ds, \\ u_{2,3}^{(1)}(x) = \int_{x_o}^x f_{23}[x, s; y_{11}(s), y_2^o, y_3^o] ds. \end{cases}$$

Ces fonctions sont continues ; elles restent, en module, respectivement inférieures aux nombres  $c_{21}, c_{22}, c_{23}$  ; elles peuvent être introduites sous le signe fonctionnel  $F_2$ . Il est légitime de poser

$$(12) \quad y_{2,1}(x) = y_2^o + \int_{x_o}^x F_2[t; y_{1,1}(t); y_2^o, y_3^o; u_{21}(t), u_{22}(t), u_{23}(t)] dt.$$

La fonction  $y_{21}(x)$  est continue, se réduit à  $y_2^o$  pour  $x = x_o$  et oscille entre  $y_2^o - b_2$  et  $y_2^o + b_2$  ; elle peut être introduite sous les signes fonctionnels  $f_{j1}, f_{j2}, f_{j3}, F_j, (j=1, 2, 3)$ .

Posons encore

$$(13) \quad \begin{cases} u_{3,1}^{(1)}(x) = \int_{x_o}^x f_{31}[x, s; y_{11}(s), y_{21}(s); y_3^o] ds, \\ u_{3,2}^{(1)}(x) = \int_{x_o}^x f_{32}[x, s; y_{11}(s), y_{21}(s); y_3^o] ds, \\ u_{3,3}^{(1)}(x) = \int_{x_o}^x f_{33}[x, s; y_{11}(s), y_{21}(s); y_3^o] ds. \end{cases}$$

Ces fonctions sont continues et respectivement inférieures en module à  $c_{31}, c_{32}, c_{33}$  ; elles peuvent être introduites sous le signe fonctionnel  $F_3$ .

Nous sommes ainsi en droit d'écrire

$$(14) \quad y_{31}(x) = y_3^o + \int_{x_o}^x F_3[t; y_{11}(t), y_{21}(t); y_3^o; u_{31}(t), u_{32}(t), u_{33}(t)] dt.$$

La fonction  $y_{31}(x)$  est continue ; elle se réduit à  $y_3^o$  pour  $x = x_o$  ; elle oscille entre  $y_3^o - b_3$  et  $y_3^o + b_3$  quand  $x$  vérifie la relation (7) ; elle peut être introduite sous les signes fonctionnels  $f_{j1}, f_{j2}, f_{j3}, F_j, (j=1, 2, 3)$ .

Le procédé peut être continué indéfiniment. Nous obtenons ainsi le système général de formules récurrentes

$$(20) \quad \begin{cases} u_{1,1}^{(\mu+1)}(x) = \int_{x_o}^x f_{11}[x, s; y_{1,\mu}(s), y_{2,\mu}(s), y_{3,\mu}(s)] ds, \\ u_{1,2}^{(\mu+1)}(x) = \int_{x_o}^x f_{12}[x, s; y_{1,\mu}(s), y_{2,\mu}(s), y_{3,\mu}(s)] ds, \\ u_{1,3}^{(\mu+1)}(x) = \int_{x_o}^x f_{13}[x, s; y_{1,\mu}(s), y_{2,\mu}(s), y_{3,\mu}(s)] ds; \end{cases}$$



(21)

$$y_{1,\mu+1}(x) = y_1^o + \int_{x_0}^x F_1[t; y_{1,\mu}(t), y_{2,\mu}(t), y_{3,\mu}(t); u_{1,1}^{(\mu+1)}(t), u_{1,2}^{(\mu+1)}(t), u_{1,3}^{(\mu+1)}(t)] dt;$$

$$(22) \begin{cases} u_{2,1}^{(\mu+1)}(x) = \int_{x_0}^x f_{21}[x, s; y_{1,\mu+1}(s), y_{2,\mu}(s), y_{3,\mu}(s)] ds, \\ u_{2,2}^{(\mu+1)}(x) = \int_{x_0}^x f_{22}[x, s; y_{1,\mu+1}(s), y_{2,\mu}(s), y_{3,\mu}(s)] ds, \\ u_{2,3}^{(\mu+1)}(x) = \int_{x_0}^x f_{23}[x, s; y_{1,\mu+1}(s), y_{2,\mu}(s), y_{3,\mu}(s)] ds; \end{cases}$$

(23)

$$y_{2,\mu+1}(x) = y_2^o + \int_{x_0}^x F_2[t; y_{1,\mu+1}(t), y_{2,\mu}(t), y_{3,\mu}(t); u_{2,1}^{(\mu+1)}(t), u_{2,2}^{(\mu+1)}(t), u_{2,3}^{(\mu+1)}(t)] dt;$$

$$(24) \begin{cases} u_{3,1}^{(\mu+1)}(x) = \int_{x_0}^x f_{31}[x, s; y_{1,\mu+1}(s), y_{2,\mu+1}(s), y_{3,\mu}(s)] ds, \\ u_{3,2}^{(\mu+1)}(x) = \int_{x_0}^x f_{32}[x, s; y_{1,\mu+1}(s), y_{2,\mu+1}(s), y_{3,\mu}(s)] ds, \\ u_{3,3}^{(\mu+1)}(x) = \int_{x_0}^x f_{33}[x, s; y_{1,\mu+1}(s), y_{2,\mu+1}(s), y_{3,\mu}(s)] ds; \end{cases}$$

(25)

$$y_{3,\mu+1}(x) = y_3^o + \int_{x_0}^x F_3[t; y_{1,\mu+1}(t), y_{2,\mu+1}(t), y_{3,\mu}(t); u_{3,1}^{(\mu+1)}(t), u_{3,2}^{(\mu+1)}(t), u_{3,3}^{(\mu+1)}(t)] dt.$$

Nous contruisons de cette manière les trois suites indéfinies de fonctions

$$(26) \quad y_{j,1}(x), y_{j,2}(x), \dots, y_{j,\mu}(x), y_{j,\mu+1}(x), \dots, (j = 1, 2, 3).$$

Les éléments de ces suites sont des fonctions continues de  $x$  dans l'intervalle  $(x_0, x_0 + h)$ ; ces fonctions se réduisent aux  $y_j^o$  pour  $x = x_0$ ; elles oscillent entre les quantités  $y_j^o - b_j$  et  $y_j^o + b_j$  quand  $x_0 \leq x \leq x_0 + h$ .

## § 5. CONVERGENCE UNIFORME DES SUITES (26).

Comme dans la théorie des équations différentielles, nous substituerons aux suites (26) les séries

$$(27) \quad y_{j,1}(x) + |y_{j,2}(x) - y_{j,1}(x)| + |y_{j,3}(x) - y_{j,2}(x)| + \dots + |y_{j,\mu+1}(x) - y_{j,\mu}(x)| + \dots$$

( $j = 1, 2, 3$ )

et nous en démontrerons la convergence absolue et uniforme. Posons pour abréger

$$(28) \quad \Delta_{j,\mu+1}(x) = |y_{j,\mu+1}(x) - y_{j,\mu}(x)|, \quad (j = 1, 2, 3).$$

Les formules récurrentes (20) à (25), jointes aux conditions de Lipschitz (5) et (6), donnent les inégalités suivantes

$$(29) \quad \Delta_{1,\mu+1}(x) < A_1 \left\{ \begin{aligned} & \int_{x_0}^x [\Delta_{1,\mu}(t) + \Delta_{2,\mu}(t) + \Delta_{3,\mu}(t)] dt \\ & + \int_{x_0}^x dt \int_{x_0}^t [\Delta_{1,\mu}(s) + \Delta_{2,\mu}(s) + \Delta_{3,\mu}(s)] ds \end{aligned} \right\},$$

$$(30) \quad \Delta_{2,\mu+1}(x) < A_2 \left\{ \begin{aligned} & \int_{x_0}^x [\Delta_{1,\mu+1}(t) + \Delta_{2,\mu}(t) + \Delta_{3,\mu}(t)] dt \\ & + \int_{x_0}^x dt \int_{x_0}^t [\Delta_{1,\mu+1}(s) + \Delta_{2,\mu}(s) + \Delta_{3,\mu}(s)] ds \end{aligned} \right\},$$

$$(31) \quad \Delta_{3,\mu+1}(x) < A_3 \left\{ \begin{aligned} & \int_{x_0}^x [\Delta_{1,\mu+1}(t) + \Delta_{2,\mu+1}(t) + \Delta_{3,\mu}(t)] dt \\ & + \int_{x_0}^x dt \int_{x_0}^t [\Delta_{1,\mu+1}(s) + \Delta_{2,\mu+1}(s) + \Delta_{3,\mu}(s)] ds \end{aligned} \right\},$$

les lettres  $A_1, A_2, A_3$  désignant des nombres positifs fixes liés aux constantes positives  $L, K, H$  des formules (5) et (6).

A leur tour, les inégalités (29), (30), (31) conduisent à la suivante

$$(32) \quad \Delta_{1,\mu+1}(x) + \Delta_{2,\mu+1}(x) + \Delta_{3,\mu+1}(x) < \left\{ \begin{aligned} & B_1 \int_{x_0}^x [\Delta_{1,\mu}(s) + \Delta_{2,\mu}(s) + \Delta_{3,\mu}(s)] ds \\ & + B_2 \int_{x_0}^x ds \int_{x_0}^s [\Delta_{1,\mu}(t) + \Delta_{2,\mu}(t) + \Delta_{3,\mu}(t)] dt \\ & + B_3 \int_{x_0}^x ds \int_{x_0}^s dt \int_{x_0}^t [\Delta_{1,\mu}(u) + \Delta_{2,\mu}(u) + \Delta_{3,\mu}(u)] du \\ & + B_4 \int_{x_0}^x ds \int_{x_0}^s dt \int_{x_0}^t du \int_{x_0}^u [\Delta_{1,\mu}(v) + \Delta_{2,\mu}(v) + \Delta_{3,\mu}(v)] dv \\ & + B_5 \int_{x_0}^x ds \int_{x_0}^s dt \int_{x_0}^t du \int_{x_0}^u dv \int_{x_0}^v [\Delta_{1,\mu}(w) + \Delta_{2,\mu}(w) + \Delta_{3,\mu}(w)] dw \\ & + B_6 \int_{x_0}^x ds \int_{x_0}^s dt \int_{x_0}^t du \int_{x_0}^u dv \int_{x_0}^v dw \int_{x_0}^w [\Delta_{1,\mu}(z) + \Delta_{2,\mu}(z) + \Delta_{3,\mu}(z)] dz, \end{aligned} \right.$$

$B_1, B_2, \dots, B_6$  désignant encore des nombres positifs fixes.

On peut écrire directement

$$(33) \quad \Delta_{1,1}(x) + \Delta_{2,1}(x) + \Delta_{3,1}(x) < C_1(x - x_0),$$

$C_1$  désignant aussi un nombre positif fixe.

La formule récurrente (32) permet alors d'établir que

$$(34) \quad \Delta_{1,\mu+1}(x) + \Delta_{2,\mu+1}(x) + \Delta_{3,\mu+1}(x) < C_1 \gamma^\mu \frac{(x - x_0)^{\mu+1}}{(\mu + 1)!},$$

moyennant l'abréviation

$$(35) \quad \gamma = B_1 + B_2 h + B_3 h^2 + B_4 h^3 + B_5 h^4 + B_6 h^5.$$

Les séries (27) sont absolument et uniformément convergentes et leurs sommes  $y_{j,\infty}(x)$  sont des fonctions continues de  $x$  prenant en  $x_0$  les valeurs  $y_j^0$  et oscillant entre les quantités  $y_j^0 - b_j$  et  $y_j^0 + b_j$  lorsque la variable indépendante  $x$  vérifie la relation (7). Les suites (26) convergent uniformément et ont pour limites les fonctions  $y_{j,\infty}(x)$ . En faisant tendre  $\mu$  vers l'infini et en passant à la limite dans les deux membres des égalités récurrentes (21), (23), (25), on voit que  $y_{1,\infty}(x)$ ,  $y_{2,\infty}(x)$ ,  $y_{3,\infty}(x)$  constituent un système de solutions des équations intégral-différentielles proposées. Il n'existe pas d'autre système de solutions jouissant des mêmes propriétés.

Saive, le 18 septembre 1947.



# Sur les équations intégrales dont le noyau est une fonction $K_n$ de Bessel

PAR

**L. POLI**

---

Les fonctions de Bessel se laissent facilement étudier par le Calcul symbolique. — Nous voudrions établir ici une nouvelle règle opératoire de ce calcul et montrer son application aux intégrales de la forme

$$f(t) = \int_0^\infty K_n(\sqrt{ts}) \varphi(s) ds.$$

1) Nous traiterons d'abord un cas particulier.

Soit une fonction  $h(t)$  et  $f(p)$  son image :

$$f(p) = p \int_0^\infty e^{-ps} h(s) ds$$

ou, avec la notation aujourd'hui classique,

$$f(p) \circ h(t) \tag{1}$$

Soit donné aussi

$$\sigma(t) \circ h\left(\frac{1}{p}\right) \tag{2}$$

Cherchons à éliminer  $h$  pour avoir une relation entre  $f$  et  $\sigma$ .

La correspondance (2) s'écrit

$$h\left(\frac{1}{p}\right) = p \int_0^\infty e^{-ps} \sigma(s) ds$$

ou, en remplaçant  $p$  par  $\frac{1}{x}$ ,

$$h(x) = \int_0^\infty \frac{1}{x} e^{-\frac{s}{x}} \sigma(s) ds \tag{3}$$

On connaît l'image

$$\frac{1}{x} e^{-\frac{s}{x}} \circ 2p K_0(2\sqrt{ps})$$

où  $K_0$  est la fonction de Bessel<sup>(1)</sup>, de sorte qu'en remplaçant les deux membres de l'égalité (3) par leur images, on obtient :

$$f(p) = 2p \int_0^\infty K_0(2\sqrt{ps}) \sigma(s) ds \tag{4}$$

---

<sup>(1)</sup> Pour les images et définitions des fonctions utilisées, on pourra se reporter au Formulaire de Calcul symbolique par MM. Mc Lachlan et P. Humbert, Fascicule C du *Mémorial des Sc. Math.*

2) Ce calcul est purement formel. Pour le rendre rigoureux, il faut justifier le passage de (3) à (4). — On sait que prendre une image sous le signe  $\int$  revient à une inversion d'intégrales. Il faudra vérifier qu'on peut écrire

$$\int_0^\infty \sigma(s) ds \int_0^\infty e^{-px} e^{-\frac{s}{x}} \frac{dx}{x} = \int_0^\infty e^{-px} \frac{dx}{x} \int_0^\infty e^{-\frac{s}{x}} \sigma(s) ds.$$

Cela dépend de la fonction  $\sigma(s)$ . Il suffira en général, et la condition est vérifiée dans tous les cas que nous envisagerons ici, que  $\sigma(s)$  soit à croissance exponentielle, c'est-à-dire qu'il existe deux constantes  $A$  et  $m$ , telles que pour  $s$  assez grand

$$|\sigma(s)| < A e^{ms}.$$

On prendra alors pour  $p$  des valeurs dont la partie réelle soit supérieure à  $m$  <sup>(2)</sup>.

On pourrait vérifier directement que cette condition, jointe à l'existence de  $\int_0^\infty e^{-ps} \sigma(s) ds$  qu'affirme la relation (1), suffit pour assurer la convergence de l'intégrale (4). — Mais cette vérification n'est pas nécessaire : la convergence résulte de notre démonstration.

3) Pour les réciproques, il suffit de suivre la marche inverse, en se souvenant que l'égalité des images implique l'égalité des originaux en tous les points où ces derniers sont continus, et l'on peut dire en résumé que des trois relations

$$\left\{ \begin{array}{l} h(t) \supset f(p); \\ \sigma(t) \supset h\left(\frac{1}{p}\right); \\ f(p) = 2p \int_0^\infty K_0(2\sqrt{ps}) \sigma(s) ds, \end{array} \right.$$

deux quelconques entraînent la troisième.

Avant de généraliser ces relations nous allons en montrer l'usage par quelques applications :  $\alpha$ ) Etablissement de relations intégrales.  $\beta$ ) Résolutions d'équations intégrales du type de (4). Et  $\gamma$ ) calcul d'intégrales de ce même type.

4) *Etablissement de relations intégrales.* Un simple coup d'œil sur le formulaire de calcul symbolique cité plus haut, nous fera connaître de très nombreuses fonctions  $h(x)$ , telles qu'on connaisse à la fois l'image de  $h(t)$  et l'original de  $h\left(\frac{1}{p}\right)$ . — Chacune de ces fonctions fournira une relation intégrale.

Voici des exemples.

---

<sup>(2)</sup> Voir pour ces questions : *Annales de l'Université de Lyon 1944* page 21, un article de l'auteur.



A) Les correspondances :

$$x^\alpha \supset \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{p^\alpha};$$

$$\frac{1}{p^\alpha} \subset \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)};$$

donneront

$$\frac{\Gamma(\alpha + 1)}{p^\alpha} = 2p \int_0^\infty K_0(2\sqrt{ps}) \frac{s^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} da$$

valable pour  $\alpha > -1$ .

On simplifie en posant  $ps = t$ . Il vient

$$[\Gamma(\alpha + 1)]^2 = 2 \int_0^\infty K_0(2\sqrt{t}) t^\alpha dt. \quad (5)$$

B) Les correspondances :

$$e^{-x} x^n \supset \frac{p}{(p+1)^{n+1}} \cdot \Gamma(n+1);$$

$$e^{-\frac{1}{p}} p^{-n} \subset x^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{x}),$$

donnent

$$\frac{\Gamma(1+n)}{(1+p)^{n+1}} = 2 \int_0^\infty K_0(2\sqrt{ps}) S^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{s}) ds.$$

On peut modifier légèrement la notation en écrivant  $s = \frac{t}{p}$  et  $p = \frac{1}{x}$ . On aura

$$\frac{\Gamma(1+n) x^{\frac{n}{2}}}{(x+1)^{n+1}} = 2 \int_0^\infty t^{\frac{n}{2}} K_0(2\sqrt{t}) J_n(2\sqrt{tx}) dt$$

qui montre que les fonctions  $\Gamma(1+n) \frac{x^n}{(x+1)^{n+1}}$  et  $t^{\frac{n}{2}} K_0(2\sqrt{t})$  sont réciproques d'ordre  $n$  dans la transformation de Hankel.

Nous écrirons ceci :

$$\Gamma(n+1) \frac{x^n}{(x+1)^{n+1}} = \mathbf{H}_n [2t^{\frac{n}{2}} K_0(2\sqrt{t})].$$

On sait qu'on a aussi

$$2t^{\frac{n}{2}} K_0(2\sqrt{t}) = \mathbf{H}_n \left[ \frac{\Gamma(n+1) x^n}{(x+1)^{n+1}} \right].$$

C) Voici un exemple de fonctions qui ne sont pas analytiques.

On a

$$e^{-\frac{1}{t}} t^{m-1} \supset 2p^{1-\frac{m}{2}} K_m(2\sqrt{p})$$

$$\text{et } e^{-p} \frac{1}{p^{m-1}} C \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{(x-1)^{m-1}}{\Gamma(m)} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

alors

$$p^{-\frac{m}{2}} K_m(2\sqrt{p}) = \int_1^\infty K_0(2\sqrt{ps}) \frac{(s-1)^{m-1}}{\Gamma(m)} ds.$$

Cette relation est intéressante. — En posant  $s = \frac{t}{p}$  et dérivant les deux membres par rapport à  $p$ , on démontrerait la relation de récurrence de la fonction  $K_n$

$$(-1)^r \frac{d^r}{dp^r} \left[ p^{\frac{m}{2}} K_m(2\sqrt{p}) \right] = p^{\frac{m-r}{2}} K_{m-r}(2\sqrt{p}).$$

D) Pour donner un dernier exemple, cherchons l'original de

$$2p [Ker^2 \sqrt{2p} + Kei^2 \sqrt{2p}]$$

On sait que l'on écrit avec Russell

$$K_0(t\sqrt{i}) = Ker\ t + i\ Kei\ t$$

et plus généralement du reste

$$K_\nu(t\sqrt{i}) = i^\nu [Ker_\nu\ t + i\ Kei_\nu\ t]$$

Or Macdonald a donné la formule (1)

$$2K_\nu(a)K_\nu(b) = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\left[s + \frac{a^2+b^2}{s}\right]} K_\nu\left[\frac{ab}{s}\right] \frac{ds}{s}$$

valable si les parties réelles de  $a$  et  $b$  sont positives.

Posons

$$a = (1+i)\sqrt{p} = \sqrt{2pi};$$

$$b = (1-i)\sqrt{p} = \sqrt{-2pi}.$$

Il viendra

$$2[Ker_\nu^2 \sqrt{2p} + Kei_\nu^2 \sqrt{2p}] = \int_0^\infty e^{-\frac{s}{2}} K_\nu\left[\frac{2p}{s}\right] \frac{ds}{s}$$

et, en faisant  $s = 2pt$

$$2p [Ker_\nu^2 \sqrt{2p} + Kei_\nu^2 \sqrt{2p}] C \frac{1}{t} K_\nu\left(\frac{1}{t}\right).$$

Opérons pour simplifier avec  $\nu = 0$

$$2p [Ker^2 \sqrt{2p} + Kei^2 \sqrt{2p}] C \frac{1}{t} K_0\left(\frac{1}{t}\right);$$

$$p K_0(p) C \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \frac{1}{\sqrt{t^2-1}} & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

Donc

$$[Ker^2 \sqrt{2p} + Kei^2 \sqrt{2p}] = \int_1^\infty K_0(2\sqrt{ps}) \frac{ds}{\sqrt{s^2-1}}.$$

(1) *Proc. Lond. Math. Soc.* 1899 XXIX.



### 5) Equations intégrales.

Pour résoudre

$$f(t) = \int_0^\infty K_0(2\sqrt{ts}) \sigma(s) ds$$

où  $\sigma(s)$  est l'inconnue, il suffit de chercher l'original, soit  $h(x)$ , de  $2pf(p)$ .

— L'original de  $h\left(\frac{1}{p}\right)$  donnera alors la fonction  $\sigma(t)$ .

Soit par exemple à résoudre

$$\frac{1}{\sqrt{t^2-4}} = 2 \int_0^\infty K_0(2\sqrt{st}) \sigma(s) ds.$$

On a

$$\frac{p}{\sqrt{p^2-4}} \subset I_0(2t)$$

où  $I_0$  est la fonction de Bessel d'argument imaginaire.

L'original de  $I_0\left(\frac{2}{p}\right)$ , soit  $[ber^2 2\sqrt{t} + bei^2 2\sqrt{t}]$  sera la fonction  $\sigma(t)$  demandée.

Et on a donc

$$\frac{1}{\sqrt{p^2-4}} = 2 \int_0^\infty K_0(2\sqrt{ps}) [ber^2 2\sqrt{s} + bei^2 2\sqrt{s}] ds.$$

(*ber* et *bei* designent les fonctions de Lord Kelvin. Cf. WATSON — *Theory of Bessel functions*. — 2<sup>e</sup> édit. page 81)

### 6) Calculs des intégrales.

Le procédé sera analogue pour calculer l'intégrale

$$f(t) = \int_0^\infty K_0(2\sqrt{ts}) \sigma(s) ds$$

où l'inconnue serait cette fois  $f(t)$ . — On cherchera l'image  $h(p)$  de  $\sigma(t)$  et  $2pf(p)$  sera l'image de  $h\left(\frac{1}{x}\right)$ . Voici deux exemples.

A) Calculer

$$f(t) = 2 \int_0^\infty K_0(2\sqrt{ts}) \cos s ds.$$

On sait que  $\cos t \supset \frac{p^2}{p^2+1}$

Il faut l'image de  $\frac{1}{1+t^2}$  : elle est connue ; c'est  $p[\sin p \text{ ci } p - \cos p \text{ si } p]$  ; d'où  $f(t) = \sin t \text{ ci } t - \cos t \text{ si } t$ .

B) Calculer

$$f(t) = 2 \int_0^\infty K_0(2\sqrt{ts}) J_0(s) ds.$$

On a

$$J_0(t) \supset \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \supset \frac{\pi p}{2} [H_0(p) - Y_0(p)],$$

où  $Y_0$  et  $H_0$  sont les fonctions de Bessel et de Struve (cf. WATSON—op.cit.).

7) Enfin on pourra souvent, en appliquant à nouveau à la relation (4) la transformation de Laplace, obtenir de nouvelles intégrales.

Par exemple de

$$\begin{aligned} \sin t &\supset \frac{p}{p^2+1}; \\ \text{bei } 2\sqrt{t} &\supset \sin \frac{1}{p}, \end{aligned}$$

on déduit d'abord

$$\frac{1}{p^2+1} = 2 \int_0^\infty K_0(2\sqrt{ps}) \text{bei}(2\sqrt{s}) ds,$$

ce qui s'écrit, en remplaçant  $p$  et  $4s$  par  $p^2$  et  $s^2$

$$\frac{1}{p^4+1} = \int_0^\infty K_0(ps) \text{bei}(s) s ds. \quad (9)$$

On sait à présent que  $\frac{p}{p^4+1}$  est l'image de  $f(x, 1, 4)$  le premier sinus du 4<sup>me</sup> ordre <sup>(1)</sup> tandis que

$$pK_0(p) \subset 0 \text{ si } x < 1 \text{ et } \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \text{ si } x > 1,$$

d'où

$$pK_0(ps) \subset 0 \text{ si } x < s \text{ et } \frac{1}{\sqrt{x^2-s^2}} \text{ si } x > s.$$

Il suffit alors de prendre l'original de l'équation (9) multipliée par  $p$  pour obtenir

$$f(x, 1, 4) = \int_0^x \frac{s \text{bei}(s) ds}{\sqrt{x^2-s^2}}. \quad (10)$$

On aurait par un procédé analogue, en partant de  $\cos t$  au lieu de  $\sin t$ ,

$$f(x, 3, 4) = \int_0^x \frac{s \text{ber}(s) ds}{\sqrt{x^2-s^2}}.$$

L'inversion d'intégrale impliquée dans ces calculs, se justifie comme au n° 3, nos fonctions étant à croissance exponentielle.

8) *Généralisation.* On peut généraliser considérablement la règle de calcul symbolique exposée au n° (1).

$$\text{Soit} \quad x^n h(x) \subset f(p) \quad (10)$$

où  $n$  est un nombre quelconque, positif ou négatif et soit aussi

$$h\left(\frac{1}{p}\right) \subset \sigma(x) \quad (11)$$

La relation entre  $f$  et  $\sigma$  s'obtient facilement.

De

$$h\left(\frac{1}{p}\right) = p \int_0^\infty e^{-ps} \sigma(s) ds;$$

(1) Voir *Ann. Soc. Scient.* t. LX série I, page 15.



on déduit en remplaçant  $p$  par  $\frac{1}{x}$

$$x_n h(x) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-\frac{s}{x}} \sigma(s) ds$$

et, prenant les images des deux membres, en nous souvenant que

$$x^{n-1} e^{-\frac{s}{x}} \supset 2p^{1-\frac{n}{2}} s^{\frac{n}{2}} K_n(2\sqrt{ps})$$

$$f(p) = 2p^{1-\frac{n}{2}} \int_0^{\infty} s^{\frac{n}{2}} K_n(2\sqrt{ps}) \sigma(s) ds \quad (12)$$

9) La condition de validité est la même qu'au n° 3. Il suffit que  $\sigma(x)$  soit à croissance exponentielle.

Les réciproques se démontreraient ici encore en suivant une marche inverse, et l'on peut dire que des trois relations (10) (11) et (12), deux quelconques impliquent la troisième.

Les applications sont aussi les mêmes et il nous suffira de quelques exemples.

10) Exemple A. — Prenons  $h(x) = x^{\alpha-n}$  où  $\alpha > n-1$ .

$$x^n x^{\alpha-n} \supset \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^\alpha};$$

$$\frac{1}{p^{\alpha-n}} \subset \frac{x^{\alpha-n}}{\Gamma(\alpha-n+1)};$$

d'où

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^\alpha} = p^{1-\frac{n}{2}} \int_0^{\infty} K_n(2\sqrt{ps}) \frac{s^{\alpha-\frac{n}{2}} ds}{\Gamma(\alpha-n+1)}$$

et, en posant  $ps = t$

$$\Gamma(\alpha+1) \Gamma(\alpha-n+1) = 2 \int_0^{\infty} K_n(2\sqrt{t}) t^{\alpha-\frac{n}{2}} dt$$

qui généralise (5).

B) On connaît les correspondances :

$$\frac{t^{\alpha+n}}{(t+1)^{\alpha+1}} \supset e^{\frac{p}{2}} \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{p^{\frac{n-1}{2}}} W_{-\frac{n+1}{2}, -\alpha, \frac{n}{2}}(p);$$

$$\frac{p}{(p+1)^{\alpha+1}} \subset e^{-t} \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)},$$

W est la fonction de Whittaker (Modern Analysis. Chap. XVI, 2 édit.) ; d'où

$$\frac{e^{\frac{p}{2}} \Gamma(\alpha+n+1)}{\sqrt{p}} W_{-\frac{n+1}{2}, -\alpha, \frac{n}{2}}(p) = 2 \int_0^{\infty} \frac{K_n(2\sqrt{ps}) s^{\alpha+\frac{n}{2}} e^{-s} ds}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

On peut déduire de là, une image intéressante déjà rencontrée par Howell<sup>(1)</sup>. — On pose  $s = \frac{t}{p}$ , et remplaçant alors  $p$  par  $\frac{1}{p}$  on obtient

$$\frac{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(\alpha+n+1)}{p^{\alpha+\frac{n-1}{2}}} e^{\frac{1}{2p}} W_{-\frac{n+1}{2}, -\alpha, \frac{n}{2}}\left(\frac{1}{p}\right) \subset 2 t^{\alpha+\frac{n}{2}} K_n(2\sqrt{t}).$$

(1) Phil. Mag. 1939 (2), page 413.

11) Montrons enfin comment la transformation de Hankel permet de déduire d'un couple de fonctions vérifiant la relation intégrale (12) un autre couple vérifiant une relation analogue.

Soient donc les fonctions  $f$  et  $\sigma$  vérifiant (10), (11) et (12).

Appelons

$$p^{\frac{\mu-1}{2}} \varphi(p) = \mathbf{H}_{\mu+1} \left[ p^{\frac{\mu-1}{2}} f(p) \right]$$

et

$$\frac{\rho(t)}{t^{\frac{\nu+1}{2}}} = \mathbf{H}_{\nu+1} \left[ \frac{\sigma(t)}{t^{\frac{\nu+1}{2}}} \right]$$

les transformées de Hankel<sup>(1)</sup> d'ordre  $\mu+1$  et  $\nu+1$  de  $p^{\frac{\mu-1}{2}} f(p)$  et  $t^{\frac{\nu+1}{2}} \sigma(t)$ .

On sait que de  $f(p) \subset \theta(t)$  on déduit

$$\frac{1}{p^\alpha} f\left(\frac{1}{p}\right) \subset t^{\frac{\alpha+1}{2}} \mathbf{H}_{\alpha+1} \left[ \frac{\theta(t)}{t^{\frac{\alpha+1}{2}}} \right]$$

et

$$t^\alpha \theta\left(\frac{1}{t}\right) \supset p^{\frac{1-\alpha}{2}} \mathbf{H}_{\alpha+1} \left[ p^{\frac{\alpha-1}{2}} f(p) \right].$$

En appliquant ces deux relations aux correspondances (10) et (11), on en tire

$$x^{\mu-n} h\left(\frac{1}{x}\right) \supset \varphi(p) \quad (13)$$

$$p^{-\nu} h(p) \subset \rho(x) \quad (14)$$

Alors, en vertu de la règle du n° 8

$$\varphi(p) = 2p^{1+\frac{n+\nu-\mu}{2}} \int_0^\infty K_{\mu-n-\nu} (2\sqrt{ps}) s^{\frac{\mu-n-\nu}{2}} \rho(s) ds. \quad (15)$$

Et la transformation de Hankel nous a permis de déduire du couple  $(f, \sigma)$  vérifiant (12) le couple  $(\varphi, \rho)$  qui vérifie (15).

Il faut bien remarquer que la démonstration suppose non seulement que  $(f, \sigma)$  vérifient (12) mais encore que les images utilisées en (10), (11), (13) et (14), existent. — Il faudrait, si ces images n'existaient pas, vérifier la convergence de l'intégrale (15). — On emploierait à cet effet les valeurs asymptotiques :

$$\text{Pour } t \rightarrow \infty, K_\mu(t) \sim \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$$

$$\text{Pour } t \rightarrow 0, t^{|\mu|} K_\mu(t) \sim \text{une constante si } \mu \neq 0$$

$$K_0(t) \sim -\text{Log } t.$$

(1) *Ann. de Lyon.* 1946 — Section A — sous presse.



# Equations intégrales et équations fonctionnelles

PAR

M. PARODI

Dans une publication antérieure <sup>(1)</sup> nous avons montré sur des exemples qu'il était possible de déterminer une solution particulière de certaines équations intégrales quand on connaît une solution d'équations fonctionnelles dont elles sont les transformées au sens de Carson.

Nous nous proposons dans ce travail de donner de nouveaux résultats obtenus par ce procédé, résultats relatifs tant à des équations intégrales qu'à des équations intégral-différentielles.

## 1. EQUATIONS FONCTIONNELLES SE RAMENANT AU TYPE SCHRÖTER.

Considérons les équations fonctionnelles

$$\begin{array}{ll} (1) & \frac{1}{t} f\left(\frac{1}{t}\right) = f(t) \\ (2) & \frac{1}{\sqrt{t}} f\left(\frac{1}{t}\right) = f(t) \\ (3) & \frac{1}{\sqrt{t}} f\left(\frac{1}{t}\right) = f(t^2) \\ (3) & \frac{1}{t} f\left(\frac{1}{t}\right) = f(t^2) \end{array}$$

Les solutions générales des deux premières sont respectivement

$$(1') \quad f(t) = t^{-\frac{1}{2}} F(t^\lambda + t^{-\lambda})$$

$$(2') \quad f(t) = t^{-\frac{1}{4}} F(t^\lambda + t^{-\lambda})$$

$F(t)$  étant une fonction arbitraire ; quant aux deux dernières leurs solutions s'écrivent respectivement

$$(3') \quad f(t) = g(t) t^{-\frac{1}{4}}, \quad (4') \quad f(t) = g(t) t^{-\frac{1}{8}}$$

$g(t)$  étant la solution générale de l'équation fonctionnelle

$$g\left(\frac{1}{t}\right) = g(t^2).$$

En représentant par  $x$  le paramètre de la transformation de Carson, on a les correspondances <sup>(2)</sup>

(1) *Comptes Rendus*, 222, 1946, p. 633.

(2) P. HUMBERT, *Bull. des Sc. Mathématiques* 69, 1945 ; et Formulaire pour le Calcul symbolique, *Mémorial des Sciences mathématiques*, fasc. 100.

$$\begin{aligned}\frac{1}{t} f\left(\frac{1}{t}\right) &\supset 2x \int_0^\infty J_0(y\sqrt{x}) \varphi\left(\frac{y^2}{4}\right) \frac{dy}{y} \\ \frac{1}{\sqrt{t}} f\left(\frac{1}{t}\right) &\supset 2\sqrt{\frac{x}{\pi}} \int_0^\infty \sin(y\sqrt{x}) \varphi\left(\frac{y^2}{4}\right) \frac{dy}{y} \\ f(t^2) &\supset \frac{x}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2 y^2}{4}} \varphi\left(\frac{1}{y^2}\right) dy\end{aligned}$$

où  $\varphi(x) \subset f(t)$ .

Faisons une transformation de Carson sur les deux membres des relations (1), (2), (3) et (4); on obtient les équations intégrales d'inconnue  $\varphi(x)$

$$\begin{aligned}(1'') \quad & 2x \int_0^\infty J_0(y\sqrt{x}) \varphi\left(\frac{y^2}{4}\right) \frac{dy}{y} = \varphi(x) \\ (2'') \quad & 2\sqrt{\frac{x}{\pi}} \int_0^\infty \sin(y\sqrt{x}) \varphi\left(\frac{y^2}{4}\right) \frac{dy}{y} = \varphi(x) \\ (3'') \quad & \int_0^\infty \sin(y\sqrt{x}) \varphi\left(\frac{y^2}{4}\right) \frac{dy}{y} = \frac{\sqrt{x}}{2} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2 y^2}{4}} \varphi\left(\frac{1}{y^2}\right) dy \\ (4'') \quad & \int_0^\infty J_0(y\sqrt{x}) \varphi\left(\frac{y^2}{4}\right) \frac{dy}{y} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2 y^2}{4}} \varphi\left(\frac{1}{y^2}\right) dy\end{aligned}$$

Compte tenu des solutions des équations fonctionnelles (1) et (2), les deux premières équations intégrales admettent les solutions

$$\begin{aligned}(1''') \quad & \varphi(x) = x \int_0^\infty e^{-xt} t^{-\frac{1}{2}} F(t\lambda + t^{-\lambda}) dt, \\ (2''') \quad & \varphi(x) = x \int_0^\infty e^{-xt} t^{-\frac{1}{4}} F(t\lambda + t^{-\lambda}) dt,\end{aligned}$$

$F(t)$  étant une fonction arbitraire, mais telle que les intégrales aient un sens : en particulier, en égalant  $F(t)$  à une constante  $C$ , les équations (1'') et (2'') admettent les solutions particulières

$$\begin{aligned}(1''') \quad & \varphi(x) = C\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) x^{\frac{1}{2}} \\ (2''') \quad & \varphi(x) = C\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) x^{\frac{1}{4}}\end{aligned}$$

En remarquant que les équations fonctionnelles (3) et (4) ont pour solutions particulières respectives

$$Ct^{-\frac{1}{6}} \quad \text{et} \quad Ct^{-\frac{1}{3}} \quad C = \text{const.}$$

il apparaît que les équations intégrales (3'') et (4'') admettent les solutions particulières respectives

$$(3''') \quad \varphi(x) = \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) x^{\frac{1}{2}}$$

$$(4''') \quad \varphi(x) = \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) y^{\frac{1}{3}}$$

On peut remarquer que l'on aurait pu utiliser la transformation de Laplace au lieu de la transformation de Carson ; on aurait obtenu ainsi d'autres équations intégrales dont des solutions particulières peuvent être déterminées par le même procédé.

Donnons un exemple. Reprenons l'équation (1)

$$\frac{1}{t} f\left(\frac{1}{t}\right) = f(t)$$

de solution générale

$$f(t) = t^{-\frac{1}{2}} F(t\lambda + t^{-\lambda})$$

Cherchons l'image, au sens de Laplace, de  $\frac{1}{t} f\left(\frac{1}{t}\right)$  ; on a par définition

$$I = \int_0^{\infty} e^{-pt} f\left(\frac{1}{t}\right) \frac{dt}{t}$$

Posons  $t = \frac{1}{u}$ , il vient

$$I = \int_0^{\infty} e^{-\frac{p}{u}} f(u) \frac{du}{u}$$

Mais

$$e^{-\frac{p}{u}} = u \int_0^{\infty} e^{-u\theta} J_0(2\sqrt{p\theta}) d\theta$$

donc

$$I = \int_0^{\infty} f(u) du \int_0^{\infty} e^{-u\theta} J_0(2\sqrt{p\theta}) d\theta = \int_0^{\infty} J_0(2\sqrt{p\theta}) d\theta \int_0^{\infty} e^{-u\theta} f(u) du$$

en supposant possible l'interversion des intégrations.

Posant  $f(t) \supset \varphi(x)$ , on obtient ainsi la correspondance, au sens de Laplace

$$\frac{1}{t} f\left(\frac{1}{t}\right) \supset \frac{1}{2} \int_0^{\infty} J_0(y\sqrt{x}) \varphi\left(\frac{y^2}{4}\right) y dy$$

et il apparaît que l'équation intégrale

$$\frac{1}{2} \int_0^{\infty} J_0(y\sqrt{x}) \varphi\left(\frac{y^2}{4}\right) y dy = \varphi(x)$$

admet la solution



$$\varphi(x) = \int_0^\infty e^{-xt} t^{-\frac{1}{2}} F(t^\lambda + t^{-\lambda}) dt$$

$F(t)$  dont une fonction arbitraire.

*Généralisation.*

Cherchons, au sens de Carson, l'image de  $\frac{1}{t^n} f(t)$ ,  $n$  étant un entier positif, on a

$$I = p \int_0^\infty e^{-pt} t^{-n} f\left(\frac{1}{t}\right) dt$$

Posons  $t = \frac{1}{u}$ , il vient

$$I = p \int_0^\infty e^{-\frac{p}{u}} u^{n-2} f(u) du.$$

Or, nous avons vu que

$$e^{-\frac{p}{u}} = u \int_0^\infty e^{-u\theta} J_0(2\sqrt{p\theta}) d\theta$$

nous aurons donc

$$I = p \int_0^\infty u^{n-2} f(u) du u \int_0^\infty e^{-u\theta} J_0(2\sqrt{p\theta}) d\theta = p \int_0^\infty J_0(2\sqrt{p\theta}) d\theta \int_0^\infty e^{-u\theta} u^{n-1} f(u) du$$

toujours en supposant l'interversion possible.

Si l'on pose  $f(t) \supset \varphi(p)$ , on a

$$\int_0^\infty e^{-u\theta} u^{n-1} f(u) du = (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}}{d\theta^{n-1}} \left[ \frac{\varphi(\theta)}{\theta} \right]$$

par suite

$$I = (-1)^{n-1} p \int_0^\infty J_0(2\sqrt{p\theta}) \frac{d^{n-1}}{d\theta^{n-1}} \left[ \frac{\varphi(\theta)}{\theta} \right] d\theta \subset \frac{1}{t^n} f\left(\frac{1}{t}\right)$$

Supposons alors que l'on ait à résoudre l'équation intégrale

$$(-1)^{n-1} x \int_0^\infty J_0(2\sqrt{x\theta}) \frac{d^{n-1}}{d\theta^{n-1}} \left[ \frac{\varphi(\theta)}{\theta} \right] d\theta = \varphi(x).$$

De ce qui précède, il résulte que cette équation est l'image de

$$\frac{1}{t^n} f\left(\frac{1}{t}\right) = f(t)$$

dont la solution générale est

$$f(t) = t^{-\frac{n}{2}} F(t^\lambda + t^{-\lambda})$$

$F(t)$  étant une fonction arbitraire.

Une solution de l'équation envisagée est donc

$$\varphi(x) = x \int_0^{\infty} e^{-xt} t^{-\frac{n}{2}} F(t\lambda + t^{-\lambda}) dt$$

à condition que les intégrales aient un sens.

## 2. EQUATIONS FONCTIONNELLES DU TYPE D'OZUMI.

Certaines équations fonctionnelles qui rentrent dans le type d'Ozumi, et qui ont été étudiées par Flamant <sup>(1)</sup> et L. B. Robinson <sup>(2)</sup> permettent d'obtenir des résultats intéressants.

a) Considérons l'équation fonctionnelle

$$(5) \quad \lambda y'(x) = y(x^2) - x^2$$

qui admet la solution particulière

$$y(x) = \lambda + x$$

Posons, au sens de Carson,  $y(x) \supset f(t)$ , on sait que l'on a

$$y'(x) \supset t f(t) - t y(0) \\ y(x^2) \supset \frac{t}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2 x^2}{4}} f\left(\frac{1}{x^2}\right) dx.$$

L'équation (5) admet donc la transformée

$$\lambda [t f(t) - t y(0)] = \frac{t}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2 y^2}{4}} f\left(\frac{1}{x^2}\right) dx - \frac{2}{t^2}$$

Or,  $y(x) = \lambda + x$  est solution de (5) ; comme  $y(0) = \lambda$ , il apparaît que

$$f(t) = \lambda + \frac{1}{t} \subset \lambda + x$$

est une solution particulière de l'équation intégrale

$$\lambda t f(t) - \frac{t}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2 x^2}{4}} f\left(\frac{1}{x^2}\right) dx = \lambda^2 t - \frac{2}{t^2}$$

b) Considérons l'équation fonctionnelle

$$(6) \quad x^n y'(x) = (n-1) y(x^2) \quad (n \text{ entier} > 0)$$

dont on vérifie facilement qu'une solution particulière est

$$y(x) = y_0 x^{n-1} \quad (y_0 = \text{const.})$$

<sup>(1)</sup> *Red. Circ. Palermo*, 1924, p. 135.

<sup>(2)</sup> *Bull. Soc. Math. France*, 64, 1936, p. 66 ; 66, 1938, p. 79.

Soit  $f(t) \subset y(x)$ , au sens de Carson, on sait que

$$x^n y'(x) \subset (-1)^n t \frac{d^n}{dt^n} f(t)$$

$$y(x^2) \supset \frac{t}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{t^2 \lambda^2}{4}} f\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) d\lambda$$

L'équation (6) a donc pour image l'équation intégrro-différentielle

$$(-1)^n \frac{d^n}{dt^n} f(t) = \frac{(n-1)}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{t^2 \lambda^2}{4}} f\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) d\lambda$$

et une solution particulière en sera l'image de  $y_0 x^{n-1}$ , c'est-à-dire

$$f(t) = y_0 \frac{\Gamma(n)}{t^{n-1}}$$

#### REMARQUE.

Dans ce dernier exemple, on aurait pu utiliser la transformation de Laplace ; compte tenu du fait que dans ce cas

$$y(x^2) \supset \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\lambda^2} e^{-\frac{t^2 \lambda^2}{4}} f\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) d\lambda$$

on montrerait que l'équation

$$(-1)^n \frac{d^n}{dt^n} [t f(t)] = \frac{(n-1)}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{t^2 \lambda^2}{4}} \frac{1}{\lambda^2} f\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) d\lambda$$

admet la solution particulière

$$f(t) = y_0 \frac{\Gamma(n)}{t^n}.$$



# Sur un théorème d'existence et d'unicité de l'intégrale d'une équation différentielle linéaire

PAR

FÉLIX ALARDIN (\*)

1. — PRÉLIMINAIRES. Dans une note du « *Journal Mathématiques pures et appliquées* » (Tome VIII, année 1929, Fasc. II), M. G. de La Vallée-Poussin a mis en évidence, par un procédé général, un intervalle d'amplitude  $h$  où toute intégrale de l'équation différentielle linéaire d'ordre  $n$  est déterminée par les valeurs qu'elle prend en  $n$  points arbitrairement donnés. Il suppose que les coefficients de l'équation

$$y^{(n)} + X_1 y^{(n-1)} + \dots + X_{n-1} y' + X_n y = X \quad (1)$$

sont continus et uniformes.

L'objet du présent mémoire est « d'étaler » dans un intervalle d'amplitude  $h$  les conditions habituelles qui déterminent une intégrale de l'équation différentielle (1). Les théorèmes d'unicité classiques « localisant » les valeurs initiales  $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$  en un même point  $x_0$ , nous nous proposons d'établir qu'une intégrale de l'équation linéaire d'ordre  $n$  est fixée par les valeurs de  $y, y', \dots, y^{(n-1)}$  en  $n$  points  $x_1, x_2, \dots, x_n$  donnés dans un intervalle  $(a, b)$ , pourvu que cet intervalle soit suffisamment petit.

Pour plus de clarté, après quelques généralités qui ramènent cette démonstration à celle du même théorème pour l'équation sans second membre, nous avons divisé notre travail en deux parties. Dans la première, nous étudions les équations homogènes à coefficients constants ; dans la seconde, nous montrons comment les considérations précédentes s'étendent naturellement aux équations homogènes à coefficients quelconques. Mais pour élucider définitivement la question dans ce cas général, il nous faut admettre que les coefficients  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont des fonctions analytiques holomorphes tout le long d'un segment  $(a, b)$  de l'axe réel telles que l'ensemble des valeurs maxima de  $|X_i^k|$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$  ;  $i = 1, \dots, n$ ) soit borné.

(\*) Travaux du Séminaire de Mathématiques de l'Université de Louvain, directeur M. Fernand Simonart.

2. — GÉNÉRALITÉS. Dans tout intervalle où le théorème que nous avons en vue d'établir s'applique, une intégrale de l'équation sans second membre

$$y^{(n)} + X_1 y^{(n-1)} + \dots + X_{n-1} y' + X_n y = 0 \quad (2)$$

qui s'y annule ainsi que ses  $(n-1)$  premières dérivées est identiquement nulle et réciproquement.

Soient  $y_1$  et  $y_2$  deux intégrales de l'équation complète (1) satisfaisant aux conditions

$$y_1(x_1) = y_2(x_1)$$

$$y_1'(x_2) = y_2'(x_2)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$y_1^{(n-1)}(x_n) = y_2^{(n-1)}(x_n).$$

Leur différence  $y = y_1 - y_2$  est une solution de l'équation incomplète (2) vérifiant les relations

$$y(x_1) = 0$$

$$y'(x_2) = 0$$

$$\dots\dots\dots$$

$$y^{(n-1)}(x_n) = 0.$$

Ceci montre qu'on peut se limiter exclusivement aux équations linéaires homogènes.

Ajoutons que le résultat précédent résulte aussi de la forme particulière de l'intégrale générale

$$y = C_1 u_1 + C_2 u_2 + \dots + C_n u_n + \varphi(x)$$

de l'équation complète (1). En effet, les constantes  $C$  relatives à l'intégrale qui prend les valeurs assignées

$$y(x_1) = a$$

$$y'(x_2) = b$$

$$\dots\dots\dots$$

$$y^{(n-1)}(x_n) = l$$

sont définies par le système de  $n$  équations linéaires

$$a - \varphi(x_1) = C_1 u_1(x_1) + C_2 u_2(x_1) + \dots + C_n u_n(x_1)$$

$$b - \varphi'(x_2) = C_1 u_1'(x_2) + C_2 u_2'(x_2) + \dots + C_n u_n'(x_2) \quad (3)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$l - \varphi^{(n-1)}(x_n) = C_1 u_1^{(n-1)}(x_n) + C_2 u_2^{(n-1)}(x_n) + \dots + C_n u_n^{(n-1)}(x_n).$$

Le déterminant  $\Delta$ , des coefficients des inconnues, est différent de

zéro s'il existe une solutions du système et une seule. Dans ce cas, le système normal

$$\begin{aligned} C_1 u_1(x_1) + C_2 u_2(x_1) + \dots + C_n u_n(x_1) &= 0 \\ C_1 u_1'(x_2) + C_2 u_2'(x_2) + \dots + C_n u_n'(x_2) &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

$$C_1 u_1^{(n-1)}(x_n) + C_2 u_2^{(n-1)}(x_n) + \dots + C_n u_n^{(n-1)}(x_n) = 0$$

n'admet que la seule solution

$$C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0. \quad (5)$$

Inversement, si (5) est la seule solution du système (4), le déterminant  $\Delta$  n'est pas nul et le système (3) admet une solution unique.

Remarquons que ce théorème démontre non seulement l'unicité de la détermination d'une intégrale par les valeurs assignées à  $y$  et ses  $(n-1)$  premières dérivées dans un intervalle  $h$  à déterminer mais, en plus, son existence dans cette intervalle.

3. — EQUATIONS A COEFFICIENTS CONSTANTS. Considérons l'équation sans second membre

$$y^{(n)} + a_1 y^{n-1} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \quad (6)$$

où  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sont des constantes quelconques. Nous avons le théorème suivant :

*Une intégrale non identiquement nulle de l'équation (6) et ses  $(n-1)$  premières dérivées ne peuvent s'annuler simultanément dans un intervalle d'amplitude*

$$h = \frac{1}{1 + (n-1)M} \text{Log} \left[ 1 + \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k}{M_k}} \right].$$

Désignons par  $M$  la plus grande des valeurs absolues

$|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|$ . Posons en abrégé

$$1) \ k \text{ pair, } \lambda_k = 1 + C_k^2 + C_k^4 + \dots + C_k^{k-2}$$

$$2) \ k \text{ impair, } \lambda_k = 1 + C_k^2 + C_k^4 + \dots + C_k^{k-1}$$

$$3) \ A_k = 1 + \frac{\lambda_k}{k!}.$$

Soit  $y(x)$  une intégrale de l'équation différentielle (6). Cette fonction satisfait aux inégalités

$$|y^n| \leq M (|y^{n-1}| + |y^{n-2}| + \dots + |y'| + |y|),$$

$$|y^{n+1}| \leq M (|y^n| + |y^{n-1}| + \dots + |y''| + |y'|),$$

$$\dots$$

$$|y^{n+k}| \leq M (|y^{n+k-1}| + |y^{n+k-2}| + \dots + |y^k|),$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots).$$



On en tire par une méthode récurrente, pour tout entier  $k > 0$ ,

$$|y^{n+k}| \leq M(M+1)^k (|y^{n-1}| + |y^{n-2}| + \dots + |y'| + |y|). \quad (7)$$

En effet, supposons que la relation (7) soit vérifiée pour  $k = 0, 1, 2, \dots, (k-1)$ . On peut écrire a fortiori

$$|y^{n+k}| \leq M (|y^{n+k-1}| + |y^{n+k-2}| + \dots + |y'| + |y|),$$

d'où

$$|y^{n+k}| \leq M[M(M+1)^{k-1} + M(M+1)^{k-2} + \dots + M(M+1) + M+1] \sum_{i=0}^{n-1} |y^i|.$$

En mettant  $k$  fois  $(M+1)$  en évidence, on obtient visiblement la formule fondamentale (7).

Comme on le sait, d'après la théorie générale,  $y(x)$  n'admet aucun point singulier à distance finie, c'est une fonction entière de  $x$ . Si elle s'annule ainsi que ses  $(n-1)$  premières dérivées respectivement aux points  $x_1, x_2, \dots, x_n$  de l'intervalle  $(a, b)$ , d'amplitude  $h$ , elle admet le développement en série

$$y = (x - x_1) y'(x_1) + \frac{(x - x_1)^2}{2!} y''(x_1) + \dots;$$

les séries qui représentent les dérivées successives ont une forme analogue:

$$y^k = (x - x_{k+1}) y^{k+1}(x_{k+1}) + \frac{(x - x_{k+1})^2}{2!} y^{k+2}(x_{k+1}) + \dots,$$

$[k = 1, 2, \dots, (n-1)]$ .

On tire de ces relations, en désignant par  $u, u^1, u^2, \dots$  les modules maxima de  $y, y', y'', \dots$  dans l'intervalle considéré,

$$u \leq hu^1 + \frac{h^2}{2!} u^2 + \frac{h^3}{3!} u^3 + \dots + \frac{h^p}{p!} u^p + \dots$$

$$u^1 \leq hu^2 + \frac{h^2}{2!} u^3 + \frac{h^3}{3!} u^4 + \dots + \frac{h^p}{p!} u^{p+1} + \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$u^{n-1} \leq hu^n + \frac{h^2}{2!} u^{n+1} + \dots + \frac{h^p}{p!} u^{n+p-1} + \dots$$

Ces séries positives ont tous leurs termes inférieurs ou au plus égaux respectivement à ceux des séries convergentes, (8)

$$u \leq hu^1 + \frac{h^2}{2!} u^2 + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} u^{n-1} +$$

$$h^n M \sum_{k=0}^{n-1} u^k \left( \frac{1}{n!} + (M+1) \frac{h}{(n+1)!} + (M+1)^2 \frac{h^2}{(n+2)!} + \dots + (M+1)^p \frac{h^p}{(n+p)!} \dots \right)$$

$$u^1 \leq hu^2 + \frac{h^2}{2!} u^3 + \dots + \frac{h^{n-2}}{(n-2)!} u^{n-1} +$$

$$h^{n-1} M \sum_{k=0}^{n-1} u^k \left( \frac{1}{(n-1)!} + (M+1) \frac{h}{n!} + (M+1)^2 \frac{h^2}{(n+1)!} + \dots + (M+1)^p \frac{h^p}{(n+p-1)!} \dots \right)$$

$$u^{n-1} \leq h M \sum_{k=0}^{n-1} u^k \left( 1 + (M+1) \frac{h}{2!} + \dots + (M+1)^p \frac{h^p}{(p+1)!} + \dots \right)$$

qui s'en déduisent en utilisant les majorantes (7). Elles sont donc convergentes et on a manifestement

$$u < h u^1 + \frac{h^2}{2!} u^2 + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} u^{n-1} + \frac{h^n}{n!} M e^{h(M+1)} \sum_{k=0}^{n-1} u^k,$$

$$u^1 < h u^2 + \frac{h^2}{2!} u^3 + \dots + \frac{h^{n-2}}{(n-2)!} u^{n-1} + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} M e^{h(M+1)} \sum_{k=0}^{n-1} u^k,$$

$$u^{n-1} < h M e^{h(M+1)} \sum_{k=0}^{n-2} u^k.$$

En appliquant un procédé particulier de sommation aux séries (8), on est conduit pour  $u, u^1, \dots, u^{n-1}$  à des majorantes inférieures présentant un intérêt spécial dans la suite. Pour simplifier notre exposé, nous ne développerons que les calculs relatifs à  $u$ . Des considérations en tout point analogues s'appliquent aux autres modules.

Compte tenu de

$$(M+1)^k = M^k + C_k^1 M^{k-1} + C_k^2 M^{k-2} + \dots + C_k^{k-1} M + 1,$$

la dernière partie du second membre de la première des inégalités (8)

$$\left( M \sum_{k=0}^{n-1} u^k \right) \left( \frac{h^n}{n!} + (M+1) \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} + \dots + (M+1)^p \frac{h^{n+p}}{(n+p)!} + \dots \right),$$

s'écrit

$$\left( M \sum_{k=0}^{n-1} u^k \right) \sum_{p=0}^{\infty} \left( \frac{h^{n+p}}{(n+p)!} + \frac{h^{n+p+1}}{(n+p+1)!} C_{p+1}^p M + \dots + \frac{h^{n+p+\alpha}}{(n+p+\alpha)!} C_{p+\alpha}^p M^\alpha + \dots \right),$$

ou

$$\left( \sum_{k=0}^{n-1} u^k \right) \sum_{p=0}^{\infty} \frac{h^p}{p! M^{n-1}} \left( \frac{p! h^n M^n}{(n+p)!} + \frac{p! h^{n+1} M^{n+1} C_{p+1}^p}{(n+p+1)!} + \dots + \frac{p! h^{n+\alpha} M^{n+\alpha} C_{p+\alpha}^p}{(n+p+\alpha)!} \dots \right).$$

Quel que soit  $\alpha$ ,

$$\frac{p! C_{p+\alpha}^p}{(n+p+\alpha)!} < \frac{1}{(n+\alpha)!},$$

ce qui donne finalement

$$\sum_{k=0}^{n-1} u^k \sum_{p=0}^{\infty} \frac{h^p}{p! M^{n-1}} \left( \frac{h^n M^n}{n!} + \frac{h^{n+1} M^{n+1}}{(n+1)!} + \dots \right),$$

expression inférieure à

$$\frac{(e^{hM} - 1)}{M^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} u^k \sum_{p=0}^{\infty} \frac{h^p}{p!} = \frac{(e^{hM} - 1)}{M^{n-1}} e^h \sum_{k=0}^{n-1} u^k;$$

par conséquent

$$u < hu^1 + \frac{h^2}{2!} u^2 + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} u^{n-1} + \frac{e^h}{M^{n-1}} (e^{mh} - 1) (u^1 + u^2 + \dots + u^{n-1}),$$

.....

$$u^k < hu^{k+1} + \frac{h^2}{2!} u^{k+2} + \dots + \frac{h^{n-k-1}}{(n-k-1)!} u^{n-1} + \frac{e^h}{M^{n-k-1}} (e^{mh} - 1) (u + u^1 + \dots + u^{k-1} u^k + u^{k+1} + \dots),$$

$$[k=0, 1, 2, \dots, (n-1)].$$

Avec ces inégalités, on prouve de suite que  $y, y', \dots, y^{(n-1)}$  ne peuvent s'annuler simultanément dans un intervalle d'amplitude  $h$ . En effet, remplaçons dans leurs seconds membres  $h$  par sa limite supérieure

$\frac{1}{M} (e^{mh} - 1)$ ; ajoutons les membre à membre, nous obtenons

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k < \frac{1}{M} (e^{mh} - 1) \sum_{k=0}^{n-1} u^k + \frac{1}{2! M^2} (e^{mh} - 1)^2 \sum_{k=0}^{n-1} u^k + \dots + \frac{1}{(n-1)! M^{n-1}} (e^{mh} - 1)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} u^k + e^h (e^{mh} - 1) \left( 1 + \frac{1}{M} + \dots + \frac{1}{M^{n-1}} \right) \sum_{k=0}^{n-1} u^k,$$

de sorte que,

$$1 < \frac{1}{M} (e^{mh} - 1) + \frac{1}{2! M^2} (e^{mh} - 1)^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)! M^{n-1}} (e^{mh} - 1)^{n-1} + e^h (e^{mh} - 1) \left( 1 + \frac{1}{M} + \dots + \frac{1}{M^{n-1}} \right),$$

et, a fortiori,

$$1 < e^{h[1+(n-1)M]} \left( 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k}{M^k} \right) - \left( 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k}{M^k} \right),$$

d'où

$$h > \frac{1}{1 + (n-1)M} \text{Log} \left[ 1 + \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k}{M^k}} \right],$$

De là, le théorème :

*Une intégrale de l'équation (6) est entièrement déterminée par les valeurs assignées à  $y$  et ses  $(n-1)$  premières dérivées en  $n$  points arbitrairement choisis d'un intervalle d'amplitude*

$$h = \frac{1}{1 + (n-1)M} \text{Log} \left[ 1 + \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k}{M^k}} \right],$$

$M$  désignant le plus grand des modules  $|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|$ .



4. EQUATIONS A COEFFICIENTS QUELCONQUES. L'énoncé du théorème précédent peut être généralisé; il s'étend aux équations différentielles linéaires homogènes d'ordre  $n$  de la forme

$$y^{(n)} + X_1 y^{(n-1)} + X_2 y^{(n-2)} + \dots + X_n y = 0, \quad (9)$$

$X_1, X_2, \dots, X_n$  étant des fonctions de la seule variable  $x$ ; il suffit, pour la suite du raisonnement, de supposer que les coefficients  $X_i$  sont des fonctions analytiques holomorphes le long d'un segment  $(a, b)$  de longueur  $2\rho$  de l'axe réel telles que l'ensemble des valeurs maxima de  $|X_i^k|$ , ( $k=0, 1, 2, \dots; i=1, 2, \dots, n$ ) soit borné supérieurement et de remplacer la limitation obtenue plus haut par le minimum  $(\rho, L) = m_0$ , où

$$L = \frac{1}{2[2 + (n-1)M]} \operatorname{Log} \left[ 1 + \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k}{M^k}} \right].$$

Nous désignons par la notation  $M$  une limite supérieure des modules maxima de  $X_1, X_2, \dots, X_n$  et de leurs dérivées successives dans l'intervalle considéré des valeurs de  $x$ .

Si l'on dérive  $k$  fois l'équation (9), il vient successivement, par la formule de Leibniz,

$$\begin{aligned} y^{n+k} + \sum_{p=1}^n D^k(X_p y^{n-p}) &= 0, \\ y^{n+k} + \sum_{p=1}^n X_p y^{n-p+k} + C_k^1 \sum_{p=1}^n X_p^1 y^{n-p+k-1} + \dots \\ &+ C_k^l \sum_{p=1}^n X_p^l y^{n-p+k-l} + \dots + \sum_{p=1}^n X_p^k y^{n-p} = 0, \end{aligned}$$

ou, en groupant les dérivées de même ordre,

$$\begin{aligned} y^{n+k} + \sum_{\alpha=k}^{p+k-1} X_{n+k-\alpha} y^\alpha + C_k^1 \sum_{\alpha=k-1}^{n+k-2} X_{n+k-\alpha-1}^1 y^\alpha + \dots \\ + C_k^l \sum_{\alpha=k-l}^{n+k-l-1} X_{n+k-l-\alpha}^l y^\alpha + \dots + \sum_{\alpha=0}^{n-1} X_{n-\alpha}^k y^\alpha = 0. \end{aligned}$$

De cette équation, on tire (10)

$$\begin{aligned} |y^{n+k}| &< M |y^{n+k-1}| + (1 + C_k^1)M |y^{n+k-2}| + (1 + C_k^1 + C_k^2)M |y^{n+k-3}| \\ &+ \dots + (1 + C_k^1 + C_k^2 + \dots + C_k^{k-1})M |y^n| + 2^k M \sum_{\alpha=0}^{n-1} |y^\alpha|; \end{aligned}$$

formule qui donne successivement, en faisant  $k=1, 2, \dots$ ,

$$|y^{n+1}| < 2M(M+2) \sum_{\alpha=0}^{n-1} |y^\alpha|,$$

$$|y^{n+2}| < 2^2 M(M+2)^2 \sum_{\alpha=0}^{n-1} |y^\alpha|,$$

$$|y^{n+3}| < 2^3 M(M+2)^3 \sum_{\alpha=0}^{n-1} |y^\alpha|,$$

et, d'une manière générale, si  $k$  est un nombre positif entier,

$$|y^{n+k}| < 2^k M(M+2)^k \sum_{\alpha=0}^{n-1} |y^\alpha|. \quad (11)$$

Pour démontrer cette relation observons que la formule récurrente (10) fournit pour majorante de  $|y^{n+k}|$  le produit d'un polynome de degré  $k+1$  en  $M$  par  $\sum_{\alpha=0}^{n-1} |y^\alpha|$ ,

$$|y^{n+k}| < (M^{k+1} + \alpha_k^1 M^k + \alpha_k^2 M^{k-1} + \dots + \alpha_k^{k-p+1} M^p + \dots + \alpha_k^{k-1} M^2 + 2^k M) \sum_{\beta=0}^{n-1} |y^\beta|.$$

On vérifie facilement que

$$\alpha_k^{k-p+1} < 2^{2k-p+1} C_k^{k-p+1}.$$

Contentons-nous d'indiquer les calculs pour  $\alpha_k^{k-1}$ . Comme

$$\begin{aligned} \alpha_k^{k-1} &= 2^{k-1} + (1 + C_k^1) 2^{k-2} + (1 + C_k^1 + C_k^2) 2^{k-3} + \\ &\quad (1 + C_k^1 + C_k^2 + C_k^3) 2^{k-4} + \dots + (1 + C_k^1 + \dots + C_k^{k-1}), \\ \alpha_{k-1}^{k-2} &= 2^{k-2} + (1 + C_{k-1}^1) 2^{k-3} + (1 + C_{k-1}^1 + C_{k-1}^2) 2^{k-4} + \\ &\quad 10 + (C_{k-1}^1 + C_{k-1}^2 + C_{k-1}^3) 2^{k-5} + \dots + (1 + C_{k-1}^1 + \dots + C_{k-1}^{k-2}), \end{aligned}$$

en posant

$$\lambda^p = 1 + C_{k-1}^1 + C_{k-1}^2 + \dots + C_{k-1}^p,$$

et compte tenu des relations

$$\begin{aligned} 1 + C_k^1 + C_k^2 + \dots + C_k^p &= (1 + C_{k-1}^1 + C_{k-1}^2 + \dots + C_{k-1}^{p-1}) + \\ &\quad (1 + C_{k-1}^1 + C_{k-1}^2 + \dots + C_{k-1}^p), \end{aligned}$$

qui résultent de l'indentité bien connue

$$C_m^n = C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1},$$

on a

$$\begin{aligned} \alpha_{k-1}^{k-2} &= 2^{k-2} + \lambda^1 2^{k-3} + \lambda^2 2^{k-4} + \lambda^3 2^{k-5} + \dots + \lambda^{k-3} 2 + \lambda^{k-2} \\ \alpha_k^{k-1} &= 2^{k-1} + (1 + \lambda^1) 2^{k-2} + (\lambda^1 + \lambda^2) 2^{k-3} + (\lambda^2 + \lambda^3) 2^{k-4} + \\ &\quad \dots + (\lambda^{k-3} + \lambda^{k-2}) 2 + (\lambda^{k-3} + \lambda^{k-2} + k). \end{aligned}$$

Si nous supposons

$$\alpha_{\kappa-1}^{\kappa-2} < 2^{2\kappa-3} C_{\kappa-1}^{\kappa-2},$$

le calcul donne

$$\alpha_{\kappa}^{\kappa-1} < 2^2 \alpha_{\kappa-1}^{\kappa-2} < 2^{2\kappa-1} C_{\kappa-1}^{\kappa-2} < 2^{2\kappa-1} C_{\kappa}^{\kappa-1}.$$

Considérons, pour fixer les idées, une intégrale particulière  $y(x)$  de l'équation (9) s'annulant ainsi que ses  $(n-1)$  premières dérivées aux points  $x_1, x_2, \dots, x_n$  d'un intervalle d'amplitude  $h$ . Il résulte du théorème d'existence de l'intégrale d'une équation différentiel que  $y(x)$  est holomorphe dans la région de convergence de rayon  $\rho$ ; sa valeur en un point quelconque  $x$  pris dans cette région est égale à la somme de la série convergente

$$y = (x - x_1) y'(x_1) + \left(\frac{x - x_1}{2!}\right)^2 y''(x_1) + \dots$$

Supposons  $h < m_0$ .

On a

$$u < h u^1 + \frac{h^2}{2!} u^2 + \dots + \frac{h^p}{p!} u^p + \dots \quad (12)$$

Du développement en série potentielle de  $y^\kappa$  on tire de même

$$u^\kappa < h u^\kappa + \frac{h^2}{2!} u^{\kappa+1} + \dots + \frac{h^p}{p!} u^{\kappa+p-1} + \dots \quad (13)$$

Occupons-nous seulement de la relation (12) et prouvons que la série second membre est convergente. Il suffit d'imaginer chaque terme de la série remplacé par le développement de la majorante correspondante suivant les puissances de  $M$ : on obtient une série à double entrée

$$h u^1 + \frac{h^2}{2!} u^2 + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} u^{n-1} + \sum_{\kappa=0}^{n-1} u^\kappa \left[ \begin{aligned} & \frac{h^n}{n!} M + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} 2 M^2 + \frac{h^{n+2}}{(n+2)!} 2^2 M^3 + \frac{h^{n+3}}{(n+3)!} 2^3 M^4 + \dots \\ & \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} 2^2 M + \frac{h^{n+2}}{(n+2)!} 2^3 M^2 C_2^1 + \frac{h^{n+3}}{(n+3)!} 2^4 M^3 C_3^1 + \dots \\ & + \dots \end{aligned} \right]$$

Mais cette série est certainement convergente quand on fait la somme par colonnes, et l'on a,

$$u < h u^1 + \frac{h^2}{2!} u^2 + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} u^{n-1} + \frac{h^n}{n!} M e^{2h(M+2)} \sum_{\kappa=0}^{n-1} u^\kappa.$$

On peut donc faire la somme de la série double par diagonales, il vient

$$u < hu^1 + \frac{h^2}{2!} u^2 + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} u^{n-1} +$$

$$M \sum_{k=0}^{n-1} u^k \sum_{p=0}^{\infty} \left[ \frac{2^{2p}}{(n+p)!} \frac{h^{n+p}}{(n+p)!} + \frac{2^{2p+1}}{(n+p+1)!} \frac{h^{n+p+1}}{(n+p+1)!} G_{p+1}^p M + \dots \right]$$

$$+ \frac{2^{2p+\alpha}}{(n+p+\alpha)!} \frac{h^{n+p+\alpha}}{(n+p+\alpha)!} G_{p+\alpha}^p M^\alpha + \dots ]$$

Des calculs analogues à ceux du § 3 conduisent aux relations

$$u < hu^1 + \frac{h^2}{2!} u^2 + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} u^{n-1} + \frac{e^{4h}}{M^{n-1}} (e^{2Mh} - 1) \sum_{k=0}^{n-1} u^k,$$

$$u^k < hu^{k+1} + \frac{h^2}{2!} u^{k+2} + \dots + \frac{h^{n-k-1}}{(n-k-1)!} u^{n-1} + \frac{e^{4h}}{M^{n-k-1}} (e^{2Mh} - 1) \sum_{k=0}^{n-1} u^k,$$

$$[k=1, 2, 3, \dots, (n-1)],$$

de sorte que  $h$  est nécessairement supérieur à

$$\frac{1}{2[2 + (n-1)M]} \text{Log} \left[ 1 + \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k}{M^k}} \right].$$

Les résultats précédents conduisent au théorème :

*Dans un intervalle suffisamment petit, l'intégrale d'une équation différentielle linéaire d'ordre  $n$*

$$y^{(n)} + X_1 y^{(n-1)} + \dots + X_{n-1} y' + X_n y = 0$$

*est déterminée par les valeurs attribuées à  $y$  et ses  $(n-1)$  premières dérivées en  $n$  points arbitrairement choisis, pourvu que l'ensemble des valeurs maxima de  $|X_i^k|$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ;  $i=1, 2, \dots, n$ ) soit borné supérieurement.*



# Sur le premier point de Lemoine du tétraèdre

PAR

M. V. THÉBAULT. Tennie (France)

NOTATIONS. — On désignera par  $a, a', b, b', c, c'$  les longueurs des arêtes BC, DA, CA, DB, AB, DC et les dièdres suivant ces arêtes ; par A, B, C, D et V les aires des faces BCD, CDA, DAB, ABC et le volume d'un tétraèdre quelconque  $T \equiv ABCD$  inscrit dans une sphère de centre O et de rayon R.

1. Par analogie avec le point de LEMOINE d'un triangle ABC dont la somme des carrés des distances aux côtés BC, CA, AB est minima, nous appelons *premier* point de LEMOINE K du tétraèdre T, le point qui se confond avec celui du minimum de la somme des carrés des distances aux quatre plans de faces. <sup>(1)</sup>

Ce point K qui a pour coordonnées barycentriques ( $A^2, B^2, C^2, D^2$ ) coïncide avec le conjugué isogonal du centre de gravité G de T, de coordonnées normales  $(\frac{1}{A}, \frac{1}{B}, \frac{1}{C}, \frac{1}{D})$ . Les distances aux plans des faces de T ont pour expressions, en posant  $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = S$ ,

$$d_a = \frac{3AV}{S}, d_b = \frac{3BV}{S}, d_c = \frac{3CV}{S}, d_d = \frac{3DV}{S}, \quad (1)$$

et le carré de sa distance au centre de la sphère circonscrite est

$$\overline{OK}^2 = R^2 - \sum \frac{a^2 B^2 C^2}{S^2}.$$

Enfin, il résulte des coordonnées normales de G, K que si

$$3A^2 = B^2 + C^2 + D^2,$$

la droite GK est parallèle au plan BCD et réciproquement.

TÉTRAÈDRE PODAIRE DE K. Le point K coïncide avec le centre de gravité de son tétraèdre podaire  $t \equiv K_a K_b K_c K_d$ . <sup>(2)</sup> Si l'on désigne par  $a_1$  et  $a'_1, \dots$ ,

<sup>(1)</sup> SIMON LHUILLIER, *Eléments d'analyse*, p. 297 — J. NEUBERG, *Mémoire sur le tétraèdre*, 1884 16.

<sup>(2)</sup> J. NEUBERG, loc. cit.

les arêtes  $K_b K_c$  et  $K_a K_d, \dots$ , la somme des carrés des arêtes de  $t$  est égale à

$$\Sigma (a_1^2 + a_1'^2) = \frac{3bV^2}{S}. \quad (2)$$

Ce tétraèdre  $t$  inscrit au tétraèdre  $T$  est celui dont la somme des carrés des arêtes est minima. <sup>(1)</sup>

En vertu des relations (1) et d'une formule connue <sup>(2)</sup>, le volume du tétraèdre  $t$  a pour expression

$$v = \frac{81 V^5}{S^3}.$$

2. — QUADRANGLES GAUCHES  $Q_1, Q_2, Q_3$ , ET TÉTRAÈDRES  $T_1, T_2, T_3$ . Nous avons déjà signalé des propriétés de trois quadrangles gauches

$$Q_1 = A_1 B_1 D_1 C_1, \quad Q_2 = A_2 D_2 C_2 B_2, \quad Q_3 = A_3 C_3 B_3 D_3$$

orthogonalement inscrits à un tétraèdre quelconque  $T$ . <sup>(3)</sup>

Rappelons que les côtés  $(A_1 B_1, B_1 D_1, D_1 C_1, C_1 A_1)$ ,  $(A_2 D_2, D_2 C_2, C_2 B_2, B_2 A_2)$ ,  $(A_3 C_3, C_3 B_3, B_3 D_3, D_3 A_3)$  de ces quadrangles sont respectivement perpendiculaires aux plans des faces  $(CDA, ABC, DAB, BCD)$ ,  $(ABC, DAB, CDA, BCD)$ ,  $(DAB, CDA, ABC, BCD)$  du tétraèdre  $T$  et que leurs longueurs sont proportionnelles aux aires des faces de celui-ci auxquelles ils sont perpendiculaires. Il en résulte les relations

$$\begin{aligned} C_1 A_1 = B_2 A_2 = D_3 A_3 = 2da, \quad B_1 D_1 = A_2 B_2 = B_3 D_3 = 2da, \\ A_1 B_1 = C_2 B_2 = C_3 B_3 = 2db, \quad D_1 C_1 = D_2 C_2 = A_3 C_3 = 2dc, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} A_1 D_1 = C_3 D_3 = k (A^2 + C^2 - 2BC \cos b')^{\frac{1}{2}} = k (B^2 + D^2 - 2BD \cos b)^{\frac{1}{2}} \\ = \frac{k}{2} bb' \sin \theta_b, \end{aligned}$$

$$B_1 C_1 = A_2 C_2 = \frac{k}{2} cc' \sin \theta_c, \quad B_2 D_2 = A_3 B_3 = \frac{k}{2} aa' \sin \theta_a,$$

$\theta_a, \theta_b, \theta_c$  étant les angles des arêtes opposées  $BC$  et  $DA$ ,  $CA$  et  $DB$ ,  $AB$  et  $DC$ , en posant  $k = \frac{6V}{S}$ .

THÉORÈME. *La somme des carrés des côtés de chacun des quadrangles  $Q_1, Q_2, Q_3$  est égale à la somme des carrés des arêtes du tétraèdre podaire  $t$  du premier point de LEMOINE  $K$  du tétraèdre  $T$ .*

En effet

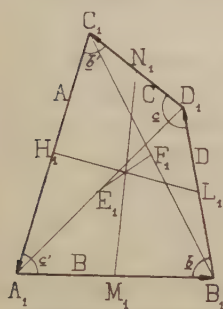
$$\overline{A_1 D_1}^2 + \overline{B_1 C_1}^2 + \overline{B_2 D_2}^2 = \frac{k^2}{4} [(aa' \sin \theta_a)^2 + (bb' \sin \theta_b)^2 + (cc' \sin \theta_c)^2] = \frac{36V^2}{S}.$$

<sup>(1)</sup> J. NEUBERG, *Mathesis*, 1915-64 et 1934-41

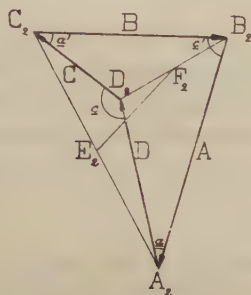
<sup>(2)</sup> FAURE, *Nouvelles Annales*, 1881-340.

<sup>(3)</sup> *Mathesis*, t. L I V (Supplément); *Comptes-Rendus* (Paris), 1944-27.

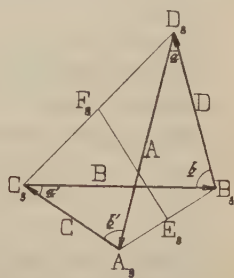
COROLLAIRE. Les bimédianes  $E_1F_1$ ,  $E_2F_2$ ,  $E_3F_3$  des tétraèdres  $T_1 \equiv A_1B_1$



$Q_1 = A_1B_1C_1D_1$



$Q_2 = A_2B_2C_2D_2$



$Q_3 = A_3B_3C_3D_3$

$D_1C_1$ ,  $T_2 \equiv A_2D_2C_2B_2$ ,  $T_3 \equiv A_3C_3B_3D_3$  sont respectivement égales à la moitié des arêtes  $B_2D_2 = A_3B_3$ ,  $A_1D_1 = C_3D_3$ ,  $B_1C_1 = A_2C_2$ .

Car

$$4 \overline{E_1F_1^2} = \overline{C_1A_1^2} + \overline{A_1B_1^2} + \overline{B_1D_1^2} + \overline{D_1C_1^2} - (\overline{A_1D_1^2} + \overline{B_1C_1^2} + \overline{B_2D_2^2}) + \overline{B_2D_2^2}$$

N.B. Pour les autres bimédianes  $H_1L_1$ ,  $M_1N_1$  du tétraèdre  $T_1$ , on a

$$\overline{H_1L_1^2} = 2(d_a^2 + d_a'^2) - \overline{E_1F_1^2}, \quad \overline{M_1N_1^2} = 2(d_b^2 + d_b'^2) - \overline{E_1F_1^2},$$

et des relations analogues pour les bimédianes correspondantes des tétraèdres  $T_2$ ,  $T_3$ .

THÉORÈME Les aires des faces des tétraèdres  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  sont proportionnelles aux arêtes du tétraèdre  $T$  auxquelles leurs plans sont perpendiculaires.

En effet,

$$C_1A_1D_1 = \frac{1}{2} C_1A_1 \cdot C_1D_1 \sin b' = \frac{27V^3}{S^2} \cdot b', \dots$$

Les aires des faces des tétraèdres  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$ , sont proportionnelles aux cotés  $(b, b', c, c')$ ,  $(c, c', a, a')$ ,  $(a, a', b, b')$  des quadrangles gauches  $ABDC$ ,  $ADCB$ ,  $ACBD$  auxquels leurs plans sont perpendiculaires.

COROLLAIRE. Les distances des premiers points de LEMOINE  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  des tétraèdres  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  aux plans des faces sont proportionnelles à  $(b, b, c, c')$ ,  $(c, c', a, a')$ ,  $(a, a', b, b')$ .

COROLLAIRE. Dans un tétraèdre orthocentrique  $T$ , les sommes des carrés des aires des faces des tétraèdres  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  sont égales.

Car, dans ces cas,

$$a^2 + a'^2 = b^2 + b'^2 = c^2 + c'^2.$$

THÉOREME. *Le volume de chacun des tétraèdres  $T_1, T_2, T_3$  est équivalent à deux fois celui du tétraèdre podaire du premier point de LEMOINE K du tétraèdre T.*

En effet, les faces  $C_1 A_1 D_1$  et  $D_1 A_1 B_1$  de  $T_1$  sont égales aux faces  $C_3 A_3 D_3$  et  $D_3 B_3 C_3$  de  $T_3$  et les dièdres suivant les arêtes  $A_1 D_1$  et  $C_3 D_3$  sont supplémentaires. De même les tétraèdres  $T_2$  et  $T_3$  ont des volumes équivalents.

Par un calcul simple l'expression du volume de  $T_1, T_2, T_3$ ,

$$v' = \frac{2}{3} \cdot C_1 D_1 A_1 \cdot D_1 A_1 B_1 \sin \theta_b = \frac{162V^5}{S^6} = 2v.$$

COROLLAIRE. *Les hauteurs des tétraèdres  $T_1, T_2, T_3$  sont inversement proportionnelles aux arêtes du tétraèdre T auxquelles elles sont parallèles.*

THÉOREME. *Les plus courtes distances des arêtes opposées de chacun des tétraèdres  $T_1, T_2, T_3$  perpendiculaires aux plans des faces du tétraèdre T sont inversement proportionnelles à deux arêtes opposées de celui-ci.*

De la relation

$$v' = \frac{1}{6} d_{AD} \cdot C_1 A_1 \cdot B_1 D_1 \sin a,$$

on déduit, en effet, que

$$a \cdot d_{AD} = a' \cdot d_{BC} = 2 (d_a^2 + d_b^2 + d_c^2 + d_d^2),$$

$d_{AD}, d_{BC}$  étant les plus courtes distances de  $C_1 A_1$  et  $B_1 D_1$ ,  $C_1 D_1$  et  $A_1 B_1$ , et des relations analogues pour les plus courtes distances des côtés opposés  $B_2 C_2$  et  $A_2 D_2$ ,  $A_2 B_2$  et  $C_2 D_2$ ,  $B_3 C_3$  et  $A_3 D_3$ ,  $C_3 A_3$  et  $D_3 B_3$  des quadrangles  $Q_2$  et  $Q_3$ .

Le produit de la plus courte distance  $d_{AD}$  des côtés  $C_1 A_1$  et  $B_1 D_1$  par l'arête  $a = BC$  d'intersection des faces  $BCD$  et  $ABC$  de T sur lesquelles ces côtés sont perpendiculaires est égal à la moitié de la somme des carrés des côtés du quadrangle gauche  $Q_1$ , et ainsi de suite.

THÉOREME. *Les plus courtes distances des arêtes opposées  $A_1 D_1$  et  $B_1 C_1$ ,  $A_2 C_2$  et  $B_2 D_2$ ,  $A_3 B_3$  et  $C_3 D_3$  des tétraèdres  $T_1, T_2, T_3$  sont inversement proportionnelles aux produits d'une des plus courtes distances des arêtes opposées du tétraèdre T par le sinus de l'angle des deux autres.*

Si l'on désigne par  $\delta$  la plus courte distance des arêtes  $A_1 D_1$  et  $B_1 C_1$  de  $T_1$  et par  $\alpha$  l'angle de ces arêtes, de l'égalité

$$A_1 D_1 \cdot B_1 C_1 \sin \alpha = C_1 A_1 \cdot B_1 D_1 \sin a \cdot d_{AD},$$

il résulte que, en raison des relations (4),

$$\delta \cdot \sin \alpha = \frac{ad_{AD}}{24V} d'_a d'_b d'_c,$$

$d'_a, d'_b, d'_c$  étant les plus courtes distances des arêtes  $DC$  et  $DA, \dots$ , de T. Or, les arêtes  $A_1 D_1, B_1 C_1$  sont parallèles aux plus courtes distances de  $AB$  et



DC, AC et DB; donc  $\alpha$  est égal à l'angle des plus courtes distances  $d'_b$  et  $d$  et le théorème est démontré.

**THÉORÈME.** *Le premier point de LEMOINE K du tétraèdre T se confond avec les centres des sphères  $(K, \sigma_1)$ ,  $(K, \sigma_2)$ ,  $(K, \sigma_3)$  circonscrites aux tétraèdres  $T_1, T_2, T_3$ .*

Car les distances du point K aux plans des faces BCD, CDA, DAB, ABC de T sont égales aux moitiés des côtés correspondants des quadrangles gauches  $Q_1, Q_2, Q_3$ .

**CALCUL DES RAYONS  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ .** Les rayons  $r_1$  et  $r_2$  des cercles circonscrits aux triangles  $C_1A_1D_1$  et  $A_1B_1D_1$ , de centres  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , ayant pour longueurs

$$r_1 = \frac{A_1D_1}{2 \sin b'} = \frac{C.A.}{S} \cdot b \sin \theta_b, \quad r_2 = \frac{B.D}{S} \cdot b' \sin \theta_b,$$

si M est le milieu de  $A_1D_1$ , le rayon  $\sigma_1$  de la sphère circonscrite au tétraèdre  $T_1$  est égal à  $KA_1$  et l'on a

$$\sigma_1^2 = \overline{KA_1^2} = \overline{K\omega_2^2} + \overline{\omega_2A_1^2} = \overline{KM^2} - \overline{\omega_2M^2} + r_2^2.$$

Or, le quadrangle  $K\omega_1 M\omega_2$  est inscriptible et comme les faces  $C_1A_1D_1, A_1B_1D_1$  se coupent sous l'angle  $\theta_b$ ,  $KM = \frac{\omega_1\omega_2}{\sin \theta_b}$ ; d'où

$$\overline{\omega_1\omega_2^2} = \overline{\omega_1M^2} + \overline{\omega_2M^2} - 2 \omega_1 M \omega_2 M \cos \theta_b.$$

Or,

$$\omega_1 M = \frac{1}{4} kbb' \cot b' \sin \theta_b, \quad \omega_2 M = \frac{1}{4} kbb' \cot b \sin \theta_b;$$

donc

$$\omega_1 \omega_2 = \frac{1}{4} kbb' \sin \theta_b (\cot^2 b + \cot^2 b' - 2 \cot b \cot b' \cos \theta_b)^{\frac{1}{2}},$$

et

$$\sigma_1 = \frac{1}{4} kbb' \sin \theta_b \left[ \frac{1}{\sin^2 \theta_b} (\cot b' - \cot b \cos \theta_b)^2 + \frac{1}{\sin^2 b} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Par des permutations circulaires convenables sur les lettres  $a, a', b, b', c, c'$ , on obtient les expressions similaires des rayons  $\sigma_2, \sigma_3$ .

Dans un tétraèdre orthocentrique T, où  $\theta_a = \theta_b = \theta_c = \frac{\pi}{2}$ , ces formules se réduisent à une seule, <sup>(1)</sup>

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \frac{2 A.B.C.D}{3 V.S} (1 - \cos^2 b \cos^2 b')^{\frac{1}{2}},$$

(1) C'est par suite d'une œuvre typographique qu'il est mentionné  $1 - \cos b \cos b'$  au lieu de  $1 - \cos^2 b \cos^2 b'$  dans nos articles précédents. (*Comptes-Rendus*, Paris, 1944-27 et *Bull. de la Soc. Math. de France*, t. 74, p. 29).

car, dans ce tétraèdre T

$$\cos a \cos a' = \cos b \cos b' = \cos c \cos c'.$$

3. — Les plans :  $\pi_A$  perpendiculaire en A à l'arête AB de T,  $\pi_B$  perpendiculaire à BD en B,  $\pi_D$  perpendiculaire à DC en D,  $\pi_C$  perpendiculaire à CA en C forment un tétraèdre  $T'_1 \equiv A'_1 B'_1 C'_1 D'_1$  homothétique au tétraèdre  $T_1 \equiv A_1 B_1 C_1 D_1$  orthogonalement inscrit au tétraèdre T, le rapport d'homothétie étant

$$k_1 = \frac{S}{18V^2} \cdot (b^2 + b'^2 + c^2 + c'^2).$$

On obtient de même les rapports analogues

$$k_2 = \frac{S}{18V^2} (c^2 + c'^2 + a^2 + a'^2), \quad k_3 = \frac{S}{18V^2} \cdot (a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2),$$

relatifs aux  $T'_2$  et  $T_2$ ,  $T'_3$  et  $T_3$ .

De ces rapports, on déduit les expressions des volumes

$$V'_1 = \frac{(b^2 + b'^2 + c^2 + c'^2)^3}{36V}, \quad V'_2 = \frac{(c^2 + c'^2 + a^2 + a'^2)^3}{36V}, \quad V'_3 = \frac{(a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2)^3}{36V}$$

de  $T'_1$ ,  $T'_2$ ,  $T'_3$ .

**THÉORÈME.** Dans un tétraèdre orthocentrique T, les sommes des carrés des aires des faces des tétraèdres  $T'_1, T'_2, T'_3$ , sont égales et les volumes des mêmes tétraèdres sont équivalents.

Les sommes des carrés des aires des faces des tétraèdres  $T'_1, T'_2, T'_3$ , comme celles des carrés des faces des tétraèdres  $T_1, T_2, T_3$ , sont égales, car elles sont proportionnelles à

$$b^2 + b'^2 + c^2 + c'^2 = c^2 + c'^2 + a^2 + a'^2 = a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2 = 2s.$$

Dès lors, dans le cas présent,

$$k_1 = k_2 = k_3 = \frac{S}{9V^2} \cdot s^2, \quad \text{et } V'_1 = V'_2 = V'_3 = \frac{2s^3}{9V}.$$

5. — AUTRES PROPRIÉTÉS DU POINT K. — A. **THÉORÈME.** Le premier point de LEMOINE K du tétraèdre T est le centre de quatre forces parallèles, proportionnelles aux carrés des aires des faces et appliquées, soit aux sommets du tétraèdre, soit aux pieds des hauteurs, soit en quatre points divisant les hauteurs dans un même rapport.

Soient quatre forces parallèles  $F_i$  appliquées aux points de coordonnées normales  $(x_i, y_i, z_i, t_i)$ , par rapport à T. Le centre des forces a pour coordonnées normales :

$$x = \frac{\sum x_i F_i}{\sum F_i}, \quad y = \frac{\sum y_i F_i}{\sum F_i}, \quad z = \frac{\sum z_i F_i}{\sum F_i}, \quad t = \frac{\sum t_i F_i}{\sum F_i}.$$

Si les forces sont appliquées aux sommets du tétraèdre dont les hauteurs issues des sommets A, B, C, D sont  $h_a, h_b, h_c, h_d$ ,

$$x_1 = h_a, y_1 = z_1 = t_1 = 0, x_2 = h_b, y_2 = z_2 = t_2 = 0, \dots,$$

et

$$x = \frac{A^2 h_a}{S} = \frac{3AV}{S} = d_a, \dots$$

Si les forces sont appliquées aux pieds A', B', C', D' des hauteurs AA', BB', CC', DD', de T,

$$x'_1 = 0, y'_1 = h_a \cos c', z'_1 = h_a \cos b', t'_1 = h_a \cos a,$$

$$x'_2 = h_b \cos c', y'_2 = 0, z'_2 = h_b \cos a', t'_2 = h_b \cos b, \dots;$$

d'où

$$x = (h_b B^2 \cos c' + h_c C^2 \cos b' + h_d D^2 \cos a) : S = \frac{3V}{S} (B \cos c' + C \cos b' + D \cos a) \\ = \frac{3AV}{S} = d_a, \dots$$

Dans le dernier cas, la propriété résulte aussitôt de ce qu'un des points partageant les hauteurs de T dans un rapport donné  $k$  a pour coordonnées normales.

$$x'' = x_1 + kx'_1, y'' = y_1 + ky'_1, z'' = z_1 + kz'_1, t'' = t_1 + kt'_1.$$

B. Le premier point de LEMOINE K se confond avec le centre de la quadrique Q inscrite à T aux pieds A', B', C', D' des hauteurs.

**THÉORÈME.** Dans un tétraèdre orthocentrique T, les droites joignant le point de LEMOINE de chaque triangle des faces au milieu de la hauteur correspondante concourent au premier point de LEMOINE K. <sup>(1)</sup>

En effet, si l'on désigne  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  les milieux des hauteurs concourantes AA', BB', CC', DD', et par  $K_a, K_b, K_c, K_d$  les points de LEMOINE des triangles BCD, CDA, DAB, ABC qui se confondent avec les centres des coniques inscrites à ces triangles aux pieds de leurs hauteurs, la droite  $K_a\alpha$  est le lieu des centres des quadriques inscrites à T et touchant la face BCD en A', et ainsi de suite.

Les droites  $K_a\alpha, K_b\beta, K_c\gamma, K_d\delta$  concourent donc au centre K de la quadrique inscrite Q et le théorème est démontré.

(Janvier 1947).

(1) R. ROUVAIST, *Mathesis*, t. LV1 — 113.

# Anneaux finis; Systèmes hypercomplexes de rang trois sur un corps commutatif

PAR

ROBERT BALLIEU

---

0. — Nous avons montré dans un article précédent <sup>(1)</sup> que tout anneau fini est soit d'ordre puissance d'un nombre premier <sup>(2)</sup>, soit composé direct d'anneaux d'ordre puissance d'un nombre premier. Dans le même article, nous avons déterminé tous les anneaux à module cyclique d'ordre puissance d'un nombre premier et tous les anneaux d'ordre carré d'un tel nombre; en même temps, nous avons obtenu tous les systèmes hypercomplexes de rang deux sur un corps qui ne sont pas eux-mêmes des corps.

Dans la présente note, nous publions les résultats de la recherche de tous les anneaux dont l'ordre est cube d'un nombre premier  $p$ . Les modules de ces anneaux sont de trois types <sup>(3)</sup> différents :  $(p^3)$ ,  $(p, p^2)$ ,  $(p, p, p)$ .

Les anneaux à module de type  $(p^3)$  ont un module cyclique et sont fournis par un résultat rappelé ci-dessus; ils sont au nombre de quatre et tous commutatifs.

Parmi les anneaux à module de type  $(p, p^2)$ , six, tous commutatifs, sont composés directs d'un des deux anneaux d'ordre  $p$  et d'un des trois anneaux à module cyclique d'ordre  $p^2$ . Ensuite, suivant que  $p$  est 2 ou un autre nombre premier, il y a quatorze ou  $(2p + 13)$  anneaux non composés directs à module de type  $(p, p^2)$ ; dans le premier cas, ces anneaux se répartissent en huit anneaux commutatifs, deux anneaux opposés à eux-mêmes <sup>(4)</sup> et non commutatifs et deux

---

(1) R. BALLIEU, Anneaux finis; Systèmes hypercomplexes de rang deux sur un corps, *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, s. I., t. 61, 1947, pp. 117-126.

(2) Dans cet article, le nombre un n'est pas considéré comme premier.

(3) Cfr. A. SEISER, *Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung*, 3<sup>e</sup> éd., Berlin, Springer, 1937, p. 51.

(4) Un anneau est dit *opposé à lui-même* quand il est isomorphe à son opposé; il existe alors une application biunivoque de l'anneau sur lui-même, dite *inverse-automorphisme* de l'anneau, faisant correspondre à la somme de deux éléments, la somme de leurs images et à leur produit dans un certain ordre, le produit de leurs images dans l'ordre opposé.



couples formés chacun d'anneaux non commutatifs opposés entre eux; les nombres correspondants pour le second cas sont : dix,  $(p+2)$ ,  $(p+1)/2$ .

Les anneaux à module de type  $(p, p, p)$  sont des systèmes hypercomplexes de rang trois sur le corps  $Z_p$  des classes de restes modulo  $p$ . Il est bien connu qu'un seul d'entre eux est un corps. La détermination des autres s'obtient comme conséquence particulière de la recherche de tous les systèmes hypercomplexes de rang trois sur un corps commutatif  $\Delta$  qui ne sont pas eux-mêmes des corps. L'application des résultats de cette dernière recherche au cas du corps  $Z_p$  montre que parmi les anneaux à module de type  $(p, p, p)$ , quatre, tous commutatifs, sont composés directs de trois anneaux d'ordre  $p$  et dix, dont six sont commutatifs et quatre, non commutatifs et opposés deux à deux, sont composés directs d'un des deux anneaux d'ordre  $p$  et d'un des cinq anneaux d'ordre  $p^2$  non composés directs et à module non cyclique. Ensuite, suivant que  $p$  est 2 ou un autre nombre premier, il y a quatorze ou  $(p+13)$  anneaux de cette catégorie non composés directs; dans le premier cas, ces anneaux se répartissent en six anneaux commutatifs, quatre anneaux opposés à eux-mêmes et non commutatifs et deux couples formés chacun d'anneaux non commutatifs opposés entre eux; les nombres correspondants pour le second cas sont : six,  $(p+3)$ , deux.

Au total, le nombre des anneaux d'ordre cube d'un nombre premier  $p$  est, après identification des anneaux isomorphes entre eux, égal à 52 lorsque  $p$  est 2 et à  $(3p+50)$  lorsque  $p$  est autre que 2; si de plus nous ne considérons pas comme distincts deux anneaux opposés l'un à l'autre, nous avons que le nombre de ces anneaux est, après identification des anneaux isomorphes ou opposés entre eux, suivant le cas, 46 ou  $(5p+91)/2$ .

Nous indiquons ci-après, au moins pour chacun de ces anneaux qui n'est ni un corps, ni composé direct, une table de multiplication pour une base convenablement choisie. Nous désignerons : par  $(a)$ , une base du module d'un anneau à module de type  $(p^3)$ ; par  $(a_1, a_2)$ , où  $a_1$  est d'ordre  $p$  et  $a_2$  d'ordre  $p^2$ , une base du module d'un anneau à module de type  $(p, p^2)$ ; par  $(a_1, a_2, a_3)$ , une base du module d'un anneau à module de type  $(p, p, p)$  ou une base par rapport au corps commutatif  $\Delta$  d'un système hypercomplexe de rang trois sur  $\Delta$ .

# 1. ANNEAUX A MODULE DE TYPE $(p^3)$ .

$$B_1: \quad a^2 = 0.$$

$$B_{1+i}: \quad a^2 = p^{3-i} a, \quad (i = 1, 2, 3).$$

Dans  $B_4$ ,  $a$  est élément-unité.

2. — ANNEAUX COMPOSÉS DIRECTS A MODULE DE TYPE  $(p, p^2)$ .

$$C_1 : a_1^2 = a_1 a_2 = a_2 a_1 = a_2^2 = 0.$$

$$C_{1+i} : a_1^2 = a_1 a_2 = a_2 a_1 = 0; a_2^2 = p^{2-i} a_2, (i = 1, 2).$$

$$C_4 : a_1^2 = a_1; a_1 a_2 = a_2 a_1 = a_2 a_2 = 0.$$

$$C_{4+i} : a_1^2 = a_1; a_1 a_2 = a_2 a_1 = 0; a_2^2 = p^{2-i} a_2, (i = 1, 2).$$

Dans  $C_6$ ,  $(a_1 + a_2)$  est élément -unité.

3. — ANNEAUX NON COMPOSÉS DIRECTS A MODULE DE TYPE  $(p, p^2)$ .

$$C_{7,\alpha} : a_1^2 = 0; a_1 a_2 = p a_2; a_2 a_1 = \alpha p a_2; a_2^2 = 0, (\alpha = 1, 2, \dots, p-1).$$

$$C_8 : a_1^2 = 0; a_1 a_2 = p a_2; a_2 a_1 = a_2^2 = 0.$$

$$C_9 : a_1^2 = 0; a_1 a_2 = 0; a_2 a_1 = p a_2; a_2^2 = 0.$$

$$C_{10} : a_1^2 = 0; a_1 a_2 = -a_2 a_1 = p a_2; a_2^2 = p a_2.$$

$$C_{11} : a_1^2 = a_1 a_2 = a_2 a_1 = 0; a_2^2 = a_1.$$

$$C_{12} : a_1^2 = 0; a_1 a_2 = a_2 a_1 = p a_2; a_2^2 = a_1.$$

$$C_{13} : a_1^2 = 0; a_1 a_2 = a_2 a_1 = \alpha p a_2; a_2^2 = a_1;$$

( $\alpha$  est un quelconque des nombres non carrés modulo  $p$ ; l'anneau est indépendant de la valeur choisie pour  $\alpha$ ).

$$C_{14} : a_1^2 = 0; a_1 a_2 = a_2 a_1 = a_1; a_2^2 = a_2.$$

$$C_{15} : a_1^2 = a_1 a_2 = 0; a_2 a_1 = a_1; a_2^2 = a_2.$$

$$C_{16} : a_1^2 = 0; a_1 a_2 = a_1; a_2 a_1 = 0; a_2^2 = a_2.$$

$$C_{17} : a_1^2 = p a_2; a_1 a_2 = a_2 a_1 = a_2^2 = 0.$$

$$C_{18} : a_1^2 = p a_2; a_1 a_2 = a_2 a_1 = 0; a_2^2 = p a_2.$$

$$C_{19} : a_1^2 = p a_2; a_1 a_2 = a_2 a_1 = 0; a_2^2 = \alpha p a_2;$$

(la remarque sur  $\alpha$  faite pour  $C_{13}$  s'applique à  $C_{19}$ ).

$$C_{20,\alpha} : a_1^2 = p a_2; a_1 a_2 = 0; a_2 a_1 = p a_2; a_2^2 = \alpha p a_2, (\alpha = 0, 1, \dots, p-1).$$

$$C_{21} : a_1^2 = p a_2; a_1 a_2 = a_2 a_1 = a_1; a_2^2 = a_2.$$

$$C_{22} : a_1^2 = \alpha p a_2; a_1 a_2 = a_2 a_1 = a_1; a_2^2 = a_2;$$

(la remarque sur  $\alpha$  faite pour  $C_{13}$  s'applique à  $C_{22}$ ).

Les anneaux  $C_{7,1}$ ,  $C_{11}$ ,  $C_{12}$ ,  $C_{14}$ ,  $C_{17}$ ,  $C_{18}$  et  $C_{21}$  sont commutatifs ainsi que les anneaux  $C_{13}$ ,  $C_{19}$  et  $C_{22}$  qui n'existent que si  $p$ , premier, est autre que 2. L'anneau  $C_{10}$  est commutatif si le nombre premier  $p$  est 2.

Chacun des anneaux  $C_{20,\alpha}$ , ( $\alpha = 0, 1, 2, \dots, p-1$ ), est opposé à lui-même et non commutatif; il en est de même, lorsque  $p$  est un premier impair, de  $C_{7,p-1}$  et de  $C_{10}$ .

L'application d'un anneau  $C_{20,\alpha}$  sur lui-même définie par

$$(1) \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 \rightarrow \xi_1 a_1 + \xi_2 a'_2, \quad (\xi_1 = 0, 1, \dots, p-1; \xi_2 = 0, 1, \dots, p^2-1),$$

où

$$(2) a'_1 = -a_1; a'_2 = -a_1 + a_2,$$

est, pour chaque valeur de  $\alpha$ , un inverse-automorphisme de l'anneau.

A condition de prendre  $a'_1 = -a_1$  et  $a'_2 = a_2$ , l'application définie par (1) de chacun des anneaux  $C_{7,p-1}$  et  $C_{10}$  sur lui-même est encore un inverse-automorphisme de l'anneau.

Les anneaux  $C_8$ ,  $C_9$ ,  $C_{15}$  et  $C_{16}$  ne sont ni commutatifs ni opposés à eux-mêmes; pour  $p$  premier impair autre que 3, il en est de même des anneaux  $C_{7,\alpha}$ , ( $\alpha = 2, 3, \dots, p-2$ ).  $C_8$  et  $C_9$  sont opposés l'un à l'autre ainsi que  $C_{15}$  et  $C_{16}$ . Si  $\alpha'$  et  $\alpha''$  satisfont aux relations

$$(3) \quad 2 \leq \alpha', \alpha'' \leq p-2; \alpha'\alpha'' \equiv 1 \pmod{p},$$

les anneaux  $C_{7,\alpha'}$  et  $C_{7,\alpha''}$  sont opposés l'un à l'autre. (Il est à noter que les relations (3) entraînent que  $\alpha'$  et  $\alpha''$  sont distincts.)

Dans  $C_{14}$ ,  $C_{21}$  et  $C_{22}$ ,  $a_2$  est élément-unité; dans  $C_{15}$ , chaque  $(\xi_1 a_1 + a_2)$ , ( $\xi_1 = 0, 1, \dots, p-1$ ), est élément-unité gaucher; dans  $C_{16}$ , chacun de ces éléments est élément-unité droitier.

#### 4. — ANNEAUX COMPOSÉS DIRECTS ET DE RANG TROIS SUR UN CORPS COMMUTATIF.

Désignons : par  $\Delta$ , le corps de base; par  $\Delta_1$ , l'anneau de carré nul isomorphe comme module à  $\Delta$ ; par  $A_i$ , ( $i = 3, 5, 6, 7$ ), les systèmes hypercomplexes non composés directs et de rang deux par rapport à  $\Delta$  ayant par rapport à celui-ci une base  $(a_1, a_2)$  définie comme suit :

pour  $A_3$  :  $a_1 a_1 = a_1 a_2 = a_2 a_1 = 0$ ;  $a_2 a_2 = a_1$ ;

pour  $A_5$  :  $a_1 a_1 = a_1$ ;  $a_1 a_2 = a_2 a_1 = a_2$ ;  $a_2 a_2 = 0$ ;

pour  $A_6$  :  $a_1 a_i = a_i$ ;  $a_2 a_i = 0$ , ( $i = 1, 2$ );

pour  $A_7$  :  $a_i a_1 = a_i$ ;  $a_i a_2 = 0$ , ( $i = 1, 2$ ).

Désignons encore par  $A_8$  un quelconque des éventuels corps de rang deux sur  $\Delta$  <sup>(1)</sup>.

Nous avons alors comme systèmes hypercomplexes à la fois composés directs et de rang trois sur  $\Delta$  les anneaux suivants :

$D_{1+i}$  : Composé direct de  $i$  anneaux  $\Delta$  et de  $(i-3)$  anneaux  $\Delta_1$ ,  
( $i = 0, 1, 2, 3$ );

---

(1) Pour les anneaux  $A_i$ , cfr. R. BALIEU, *loc. cit.*, pp. 121 et 125.

- $D_5$  : Composé direct de  $A_3$  et de  $\Delta$ ;  
 $D_6$  : Composé direct de  $A_3$  et de  $\Delta_1$ ;  
 $D_{7+i}$  : Composé direct de  $A_{5+i}$  et de  $\Delta$ , ( $i = 0, 1, 2, 3$ );  
 $D_{11+i}$  : Composé direct de  $A_{5+i}$  et de  $\Delta_1$ , ( $i = 0, 1, 2, 3$ ).

Les symboles  $D_{10}$  et  $D_{14}$  correspondent chacun à autant d'anneaux distincts, abstraction faite des isomorphismes, qu'il y a, dans le même sens, de corps distincts de rang deux sur  $\Delta$  <sup>(1)</sup>.

Les anneaux précédents sont commutatifs à l'exception de  $D_8$  et  $D_9$ , opposés l'un à l'autre, et de  $D_{12}$  et  $D_{13}$  également opposés l'un à l'autre.

$D_4$ ,  $D_7$  et les  $D_{10}$  éventuels ont un élément-unité;  $D_8$  renferme un ensemble d'éléments-unités gauchers de même puissance que  $\Delta$ ;  $D_9$  renferme un pareil ensemble d'éléments-unités droitiers.

5. — ANNEAUX NON COMPOSÉS DIRECTS ET DE RANG TROIS SUR UN CORPS COMMUTATIF. Nous indiquons ci-après les tables de multiplication de bases convenablement choisies de ceux de ces anneaux qui ne sont pas des corps;  $\Delta$  désigne à nouveau le corps de base; l'indice  $j$  prend partout les valeurs 1, 2 et 3.

$$D_{15} : a_1a_j = a_2a_1 = a_3a_2 = 0; a_2a_3 = a_2; a_3a_1 = a_1; a_3^2 = a_3.$$

$$D_{16} : a_1a_j = a_3a_2 = a_3a_j = 0; a_2a_3 = a_1.$$

$$D_{17} : a_1a_j = a_3a_1 = a_3^2 = 0; a_2^2 = a_3; a_2a_3 = a_3a_2 = a_1.$$

$$D_{18} : a_1a_j = a_3a_1 = a_2a_3 = a_3a_2 = 0; a_2^2 = a_3^2 = a_1.$$

$$D_{19,\alpha} : a_1a_j = a_3a_1 = a_2a_3 = a_3a_2 = 0; a_2^2 = a_1; a_3^2 = \alpha a_1,$$

( $\alpha$  est un élément non carré dans  $\Delta$ ).

$$D_{20,\alpha} : a_1a_j = a_3a_1 = a_2a_3 = 0; a_2^2 = a_3a_2 = a_1; a_3^2 = \alpha a_1, (\alpha \in \Delta, \alpha \neq 0).$$

$$D_{21} : a_1a_j = a_3a_1 = a_j^2 = 0; a_2a_3 = a_3a_2 = a_1.$$

$$D_{22} : a_1a_j^3 = a_3a_1 = a_j; a_2^2 = a_2a_3 = 0; a_3a_2 = a_2; a_3^2 = a_3.$$

$$D_{23} : a_1a_j = a_3a_1 = a_j; a_ia_k = 0, (i, k = 2, 3).$$

$$D_{24} : a_1a_j = a_3a_1 = a_j; a_2^2 = a_2a_3 = a_3a_2 = 0; a_3^2 = a_2^{(2)}.$$

<sup>(1)</sup> Ces corps sont, lorsque  $p$ , caractéristique de  $\Delta$ , est différent de 2, en correspondance biunivoque avec les classes d'une certaine partition des éléments non carrés de  $\Delta$ ; lorsque  $p$  est 2, ils se partagent en deux catégories : les corps de l'une sont encore en correspondance biunivoque avec les classes d'une partition des éléments non carrés de  $\Delta$ ; ceux de l'autre sont en correspondance biunivoque avec les classes d'une partition des éléments  $\alpha$  de  $\Delta$  tels que  $x^2 + x + \alpha = 0$  soit insoluble en  $\Delta$ . (Cfr. R. BALLIEU, *loc. cit.*, pp. 125 et 126).

<sup>(2)</sup> Les « Irreducible Systeme mit drei Einheiten » I, II, III, indiqués dans l'*Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, t. I, p. 167, correspondent, quel que soit le corps commutatif de base  $\Delta$  de caractéristique autre que 2, respectivement à  $D_{24}$ ,  $D_{22}$  et  $D_{23}$ ; si  $\Delta$  est de caractéristique 2, les systèmes II et III sont isomorphes.



$$\mathbf{D}_{25} : a_1 a_j = a_j; a_2 a_j = a_3 a_j = 0.$$

$$\mathbf{D}_{26} : a_j a_1 = a_j; a_j a_2 = a_j a_3 = 0.$$

$$\mathbf{D}_{27} : a_1 a_j = a_j; a_2 a_j = a_3 a_2 = a_3 a_3 = 0; a_3 a_1 = a_3.$$

$$\mathbf{D}_{28} : a_j a_1 = a_j; a_j a_2 = a_2 a_3 = a_3 a_3 = 0; a_1 a_3 = a_3.$$

Le symbole  $\mathbf{D}_{19,\alpha}$  représente autant d'anneaux distincts, abstraction faite des isomorphismes, qu'il y a de classes d'éléments non carrés dans  $\Delta$  en considérant comme équivalents deux de ces éléments dont l'un est le produit par le carré d'un élément de  $\Delta$  de l'image de l'autre dans un automorphisme de  $\Delta$ . Le symbole  $\mathbf{D}_{20,\alpha}$  représente autant d'anneaux distincts, abstraction faite des isomorphismes, qu'il y a de classes d'éléments non nuls de  $\Delta$  en rangeant dans une même classe deux de ces éléments dont l'un est l'image de l'autre dans un automorphisme de  $\Delta$ . Dans le cas des anneaux à module de type  $(p, p, p)$ , il n'y a, si  $p$  est 2, aucun  $\mathbf{D}_{19,\alpha}$  tandis qu'il y en a un seul pour  $p$  premier impair; il y a toujours  $(p - 1)$   $\mathbf{D}_{20,\alpha}$ .

Les anneaux  $\mathbf{D}_{17}$ ,  $\mathbf{D}_{18}$ ,  $\mathbf{D}_{23}$ ,  $\mathbf{D}_{24}$  et les  $\mathbf{D}_{19,\alpha}$  éventuels sont commutatifs; il en est de même de  $\mathbf{D}_{21}$  si  $\Delta$  est de caractéristique 2.

Les anneaux  $\mathbf{D}_{15}$ ,  $\mathbf{D}_{16}$ ,  $\mathbf{D}_{20,\alpha}$  et  $\mathbf{D}_{22}$  sont opposés à eux-mêmes sans être commutatifs; il en est de même de  $\mathbf{D}_{21}$  lorsque  $\Delta$  est de caractéristique autre que 2. Les applications suivantes de ces anneaux sur eux-mêmes en sont des inverses-automorphismes;  $\xi_i$  y désigne un élément quelconque de  $\Delta$ .

$$\mathbf{D}_{15} : \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3 \rightarrow \xi_2 a_1 + \xi_1 a_2 + \xi_3 a_3.$$

$$\mathbf{D}_{16} : \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3 \rightarrow \xi_1 a_1 + \xi_3 a_2 + \xi_2 a_3.$$

$$\mathbf{D}_{20,\alpha} : \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3 \rightarrow \xi_1 \alpha a_1 + \xi_3 \alpha a_2 + \xi_2 a_3.$$

$$\mathbf{D}_{22} : \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3 \rightarrow (\xi_1 + \xi_3) a_1 + (\xi_2 + \xi_3) a_2 - \xi_3 a_3.$$

$$\mathbf{D}_{21} : \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3 \rightarrow -\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3.$$

Les anneaux  $\mathbf{D}_{25}$  et  $\mathbf{D}_{26}$  ainsi que  $\mathbf{D}_{27}$  et  $\mathbf{D}_{28}$  sont non commutatifs et opposés l'un de l'autre.

$\mathbf{D}_{22}$ ,  $\mathbf{D}_{23}$  et  $\mathbf{D}_{24}$  ont un élément-unité, chaque  $(a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3)$ ,  $(\xi_2, \xi_3 \in \Delta)$ , est élément-unité gaucher dans  $\mathbf{D}_{25}$  et est élément-unité droitier dans  $\mathbf{D}_{26}$ ; dans  $\mathbf{D}_{27}$ , chaque  $(a_1 + \xi_2 a_2)$ ,  $(\xi_2 \in \Delta)$ , est élément-unité gaucher; dans  $\mathbf{D}_{28}$ , chacun de ces éléments est élément-unité droitier.

Signalons enfin que, quel que soit le corps commutatif  $\Delta$ , il n'existe aucun sur-corps de  $\Delta$  non commutatif et de rang trois par rapport à  $\Delta$ .

# La récession des nébuleuses extra-galactiques

PAR

**P. DRUMAUX**

Professeur à l'Université de Gand

Nous avons montré antérieurement <sup>(1)</sup> que le mouvement des nébuleuses n'était pas exclusivement radial mais était régi en première approximation par une loi d'après laquelle la vitesse est une fonction vectorielle linéaire du rayon-vecteur mené de la voie lactée vers la nébuleuse envisagée.

Rappelons que nous avons obtenu cette relation en partant de la loi générale de la gravitation d'Einstein sans y adjoindre aucune hypothèse mais en prenant en considération le fait que la voie lactée est en chute libre et en substituant à l'espace-temps réel un espace-temps osculateur avec contact du 3<sup>e</sup> ordre.

La loi ainsi obtenue peut se formuler comme suit :

Choisissons des axes coordonnés trirectangulaires à leur origine O, laquelle est supposée solidaire de la voie lactée, et soient  $x_1, x_2$  et  $x_3$  les coordonnées spatiales d'une nébuleuse à un instant donné  $t$ . Désignons d'autre part par  $v_1, v_2$  et  $v_3$  les composantes de la vitesse de la nébuleuse suivant les trois axes. La loi en question s'exprime par les relations :

$$\begin{aligned}v_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\v_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\v_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3\end{aligned}\tag{1}$$

où les 9 coefficients  $a_{\mu\nu}$  dépendent des coefficients des termes du 3<sup>e</sup> degré dans l'expression des potentiels gravifiques osculateurs.

---

<sup>(1)</sup> La vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques. — *Ann. de la Soc. scient. de Bruxelles*, t. LVI, série B, 1936, p. 327.

La vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques. — *Ciel et Terre*. (Bull. de la Soc. belge d'Astronomie), t. LVII, n° 4. Avril 1941.

La répartition macroscopique des nébuleuses extra-galactiques. — *Ann. de la Soc. scient. de Bruxelles*, t. LX, (1940-1946), Série I, 3<sup>e</sup> fasc., p. 115, juillet 1946.

La récession des nébuleuses extra-galactiques et leur répartition macroscopique. — *Ibid.* Série I, t. LX, 1946, p. 213.

Rappelons à cet égard que l'espace-temps trouve l'expression de sa métrique dans les dix fonctions  $g_{\mu\nu}$  représentant les potentiels gravifiques. Si on les développe en série on aura :

$$g_{\mu\nu} = E + A_{\alpha}^{\mu\nu} x_{\alpha} + \frac{1}{2} B_{\alpha\beta}^{\mu\nu} x_{\alpha} x_{\beta} + \frac{1}{6} C_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu} x_{\alpha} x_{\beta} x_{\gamma} + \dots \quad (2)$$

où  $E$  désigne les valeurs euclidiennes, soit  $\mp 1$  pour  $\mu = \nu$  soit 0 pour  $\mu \neq \nu$ , et où les constantes  $A_{\alpha}^{\mu\nu}$ ,  $B_{\alpha\beta}^{\mu\nu}$ ,  $C_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu}$  sont les dérivées partielles successives prises à l'origine des coordonnées spatiales et au temps initial  $t = 0$ , c'est-à-dire sur la voie lactée et à l'époque cosmique actuelle choisie comme initiale. Alors le développement en série limité aux termes du 3<sup>e</sup> degré inclusivement représente les potentiels osculateurs avec contact du 3<sup>e</sup> ordre à la voie lactée et à notre époque.

Cela étant les 9 coefficients  $a_{\mu\nu}$  ne dépendent que des constantes  $C_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu}$ . Cette dépendance est la suivante :

Désignons par  $c$  la vitesse de la lumière, par  $K$  la constante newtonienne de la gravitation, par  $\kappa$  la constante gravifique einsteinienne  $8\pi K/c^2$  et par  $\rho$  la densité macroscopique de répartition des nébuleuses. On aura :

$$a_{\mu\nu} = \frac{c}{2\kappa\rho} \left[ \left( C_{14\nu}^{\mu 1} - C_{\mu 4\nu}^{11} \right) + \left( C_{24\nu}^{\mu 2} - C_{\mu 4\nu}^{22} \right) + \left( C_{34\nu}^{\mu 3} - C_{\mu 4\nu}^{33} \right) \right] \quad (3)$$

Si les axes coordonnés choisis, lesquels correspondent à des géodésiques spatiales et sont trirectangulaires à leur origine 0, sont dépourvus de mouvement de rotation et si les horloges de référence sont solidaires des axes, les potentiels  $g_{14}$ ,  $g_{24}$  et  $g_{34}$  seront nuls et il n'y aura donc que 7 potentiels  $g_{\mu\nu}$  au lieu de 10. Comme les indices inférieurs des  $C_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu}$  sont permutablement entre eux, vu que l'ordre des dérivations partielles successives des  $g_{\mu\nu}$  est indifférent, il y aura  $7 \times 20$  constantes  $C_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu}$  parmi lesquelles il n'y en a que 30 qui interviendront pour déterminer les  $a_{\mu\nu}$ , ainsi qu'on le vérifierait aisément sur les équations (3).

Au point de vue du caractère général des conclusions auxquelles nous aboutirons, signalons ici que toutes les constantes  $A$ ,  $B$ , et  $C$  entrant dans les expressions (2) des  $g_{\mu\nu}$  sont laissées indéterminées pour ne pas préjuger de la métrique de l'espace-temps. Faisons remarquer aussi que le développement en série (2) est permis parce que nous considérons la structure de l'espace-temps du point de vue macroscopique, ce qui nivelle les singularités et variations locales, et parce que nous resterons endéans des limites de distance et de durée telles que les écarts par rapport à l'euclidien demeurent petits, ce qui

correspond à des distances de l'ordre de cent millions d'années-lumière pour lesquelles ces écarts n'atteignent pas le millième.

Cela étant nous allons déduire des relations (1) les équations des trajectoires et le mouvement des nébuleuses.

Dans notre précédente communication sur la récession des nébuleuses et leur répartition macroscopique nous avons eu l'occasion de montrer que l'intégration de (1), laquelle se ramène à celle du système différentiel :

$$dt = \frac{dx_1}{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3} = \frac{dx_2}{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3} = \frac{dx_3}{a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3}$$

conduit à introduire des coefficients  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$  en vue de mettre  $dt$  sous la forme :

$$dt = \frac{\alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2 + \alpha_3 dx_3}{(a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + a_{31}\alpha_3)x_1 + (a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + a_{32}\alpha_3)x_2 + (a_{13}\alpha_1 + a_{23}\alpha_2 + a_{33}\alpha_3)x_3}$$

et amène aussi à introduire un coefficient de proportionnalité  $k$  permettant d'exprimer les conditions pour que  $dt$  soit une différentielle totale, à savoir :

$$\begin{aligned} a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + a_{31}\alpha_3 &= k\alpha_1 \\ a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + a_{32}\alpha_3 &= k\alpha_2 \\ a_{13}\alpha_1 + a_{23}\alpha_2 + a_{33}\alpha_3 &= k\alpha_3 \end{aligned} \quad (4)$$

dont la compatibilité exige que  $k$  soit racine de la cubique :

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} - k & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - k \end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$

L'intégration donne alors :

$$t = \frac{1}{k} l (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) - c \quad (6)$$

où  $c$  est une constante arbitraire.

Désignons par  $k_\mu$ , où  $\mu = 1, 2$  ou  $3$ , les racines de la cubique (5) et par  $\alpha_{\mu 1}$ ,  $\alpha_{\mu 2}$  et  $\alpha_{\mu 3}$  les solutions correspondantes de (4).

L'équation (6) donnera lieu aux trois équations :

$$t = \frac{1}{k_\mu} l (\alpha_{\mu 1} x_1 + \alpha_{\mu 2} x_2 + \alpha_{\mu 3} x_3) - c_\mu \quad (7)$$

où  $c_\mu$  est la constante d'intégration correspondant à  $k_\mu$ .

En posant  $k_\mu c_\mu \equiv C_\mu$  on aura :

$$\alpha_{\mu 1} x_1 + \alpha_{\mu 2} x_2 + \alpha_{\mu 3} x_3 = e^{k_\mu t} + C_\mu \quad (8)$$



représentant les équations paramétriques des trajectoires des nébuleuses.

En y faisant  $t = 0$  on voit qu'à chaque système de valeurs de  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  correspond un système de valeurs initiales de  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  c'est-à-dire une nébuleuse occupant la position correspondante au temps initial, pour lequel nous avons choisi l'époque cosmique actuelle.

Les équations (8) représentent donc sous forme d'une famille de courbes l'ensemble des trajectoires de toutes les nébuleuses extragalactiques, et elles donnent aussi leur mouvement sur ces trajectoires puisque le paramètre  $t$  représente le temps.

Opérons un changement de coordonnées en posant :

$$x'_\mu = \alpha_{\mu 1} x_1 + \alpha_{\mu 2} x_2 + \alpha_{\mu 3} x_3 \quad (9)$$

Les équations (8) deviennent :

$$x'_1 = e^{k_1 t} + C_1 \quad x'_2 = e^{k_2 t} + C_2 \quad x'_3 = e^{k_3 t} + C_3 \quad (10)$$

ou bien en désignant par  $(x'_\mu)_0$  la valeur de  $x'_\mu$  pour  $t = 0$  :

$$x'_1 = (x'_1)_0 e^{k_1 t} \quad x'_2 = (x'_2)_0 e^{k_2 t} \quad x'_3 = (x'_3)_0 e^{k_3 t} \quad (11)$$

D'après (9) on voit que les nouvelles coordonnées sont des coordonnées dites normales par rapport au trièdre des trois plans  $P_\mu$  correspondant aux équations :

$$\alpha_{\mu 1} x_1 + \alpha_{\mu 2} x_2 + \alpha_{\mu 3} x_3 = 0$$

\* \* \*

Considérons d'abord le cas où la cubique (5) n'a qu'une seule racine réelle  $k_1$ . Les deux autres  $k_2$  et  $k_3$  sont alors conjuguées, et il en sera de même des coefficients  $\alpha_{2v}$  et  $\alpha_{3v}$  ainsi que des constantes  $C_2$  et  $C_3$ . Posons donc en désignant  $\sqrt{-1}$  par  $i$  :

$$\begin{aligned} k_2 &= p + qi & k_3 &= p - qi \\ \alpha_{2v} &= \sigma_v + \tau_v i & \alpha_{3v} &= \sigma_v - \tau_v i \\ C_2 &= D + Ei & C_3 &= D - Ei \end{aligned} \quad (12)$$

et introduisons au lieu des coordonnées imaginaires  $x'_2$  et  $x'_3$  de nouvelles coordonnées réelles  $x''_2$  et  $x''_3$  en posant :

$$x''_2 = \frac{1}{2} (x'_2 + x'_3) \quad x''_3 = \frac{1}{2} \frac{x'_2 - x'_3}{i} \quad (13)$$

On aura en vertu de (9) :

$$\begin{aligned} x''_2 &= \sigma_1 x_1 + \sigma_2 x_2 + \sigma_3 x_3 \\ x''_3 &= \tau_1 x_1 + \tau_2 x_2 + \tau_3 x_3 \end{aligned} \quad (14)$$

Les nouvelles coordonnées  $\kappa_2''$  et  $\kappa_3''$  seront donc des coordonnées normales par rapport aux plans réels représentés par les équations :

$$\sigma_1 \kappa_1 + \sigma_2 \kappa_2 + \sigma_3 \kappa_3 = 0$$

$$\tau_1 \kappa_1 + \tau_2 \kappa_2 + \tau_3 \kappa_3 = 0$$

que nous appellerons les plans  $\sigma$  et  $\tau$  et qui remplaceront les plans imaginaires  $P_2$  et  $P_3$ .

Les équations (13) donnent alors aisément, compte tenu de (11) et de (12) :

$$\begin{aligned} \kappa_2'' &= e^{pt} e^D (\cos qt \cos E - \sin qt \sin E) \\ \kappa_3'' &= e^{pt} e^D (\sin qt \cos E + \cos qt \sin E) \end{aligned} \quad (15)$$

Pour  $t = 0$  on aura :

$$(\kappa_2'')_0 = e^D \cos E \quad (\kappa_3'')_0 = e^D \sin E$$

et par conséquent :

$$\begin{aligned} \kappa_2'' &= [(\kappa_2'')_0 \cos qt - (\kappa_3'')_0 \sin qt] e^{pt} \\ \kappa_3'' &= [(\kappa_2'')_0 \sin qt + (\kappa_3'')_0 \cos qt] e^{pt} \end{aligned} \quad (16)$$

d'où l'on tire :

$$(\kappa_2'')^2 + (\kappa_3'')^2 = [(\kappa_2'')_0^2 + (\kappa_3'')_0^2] e^{2pt} \quad (17)$$

Cette équation correspond à la projection de la trajectoire sur un plan normal aux plans  $\sigma$  et  $\tau$ .

Si cette projection est rapportée à deux axes rectangulaires situés dans les plans bissecteurs du dièdre  $(\sigma\tau)$ , on aura entre les anciennes coordonnées  $\kappa_2''$  et  $\kappa_3''$  et les nouvelles coordonnées  $X_2$  et  $X_3$  les relations ci-dessous, où  $\Theta$  est l'angle du dièdre susdit :

$$\begin{aligned} \kappa_2'' &= X_3 \cos \frac{\Theta}{2} + X_2 \sin \frac{\Theta}{2} \\ \kappa_3'' &= -X_3 \cos \frac{\Theta}{2} + X_2 \sin \frac{\Theta}{2} \end{aligned}$$

En remplaçant dans (17) il vient :

$$\frac{X_3^2}{[(X_3)_0^2 + (X_2)_0^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\Theta}{2}] e^{2pt}} + \frac{X_2^2}{[(X_2)_0^2 + (X_3)_0^2 \cotg^2 \frac{\Theta}{2}] e^{2pt}} = 1 \quad (18)$$

c'est-à-dire que la projection de la trajectoire est une spirale elliptique. La trajectoire elle-même est en vrille.

La vitesse angulaire dépend, d'après (16), de la partie imaginaire  $qi$  des racines  $k_2$  et  $k_3$  de la cubique (5), tandis que la vitesse moyenne radiale du mouvement projeté dépend d'après (18) de leur partie réelle  $p$ .

Un cas particulier se présente lorsque  $(X_2)_0 = 0$  et  $(X_3)_0 = 0$ . L'équation (18) donne alors  $X_2 = 0$  et  $X_3 = 0$ . Il en résulte que toutes les nébuleuses situées à l'instant initial  $t = 0$ , correspondant à l'époque cosmique actuelle, sur l'intersection des plans  $\sigma$  et  $\tau$  ont une trajectoire rectiligne qui est cette même intersection, laquelle est aussi l'intersection réelle des plans imaginaires  $P_2$  et  $P_3$ .

Ce résultat peut être obtenu par une autre voie :

Recherchons la condition pour que le vecteur  $\bar{v}$  représentant la vitesse d'une nébuleuse soit dirigé suivant le rayon-vecteur  $\bar{r}$  joignant l'origine des coordonnées, c'est-à-dire la voie lactée, à cette nébuleuse.

En désignant par  $k$  un facteur de proportionnalité on devra avoir dans les axes  $Ox_1x_2x_3$  :

$$v_1 = kx_1 \qquad v_2 = kx_2 \qquad v_3 = kx_3$$

En remplaçant dans (1) il vient :

$$\begin{aligned} (a_{11} - k)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - k)x_2 + a_{23}x_3 &= 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33} - k)x_3 &= 0 \end{aligned} \tag{19}$$

dont la compatibilité exige que  $k$  soit racine de la cubique (5).

Comme celle-ci a une ou trois racines réelles, il y a une ou trois trajectoires rectilignes. Dans le cas d'une seule racine réelle la trajectoire est celle obtenue plus haut.

S'il y a trois racines réelles les trajectoires rectilignes sont les arêtes du trièdre  $P_1P_2P_3$ . Ce sont aussi les normales aux faces du trièdre  $Ox'_1x'_2x'_3$ , qui lui est conjugué. En effet, si l'on fait par exemple  $(x'_2)_0 = 0$  et  $(x'_3)_0 = 0$  dans (11), on aura  $x_2 = 0$  et  $x_3 = 0$ , c'est-à-dire qu'une nébuleuse située sur l'intersection des plans  $P_1$  et  $P_2$  restera sur celle-ci. D'autre part cette intersection, du fait qu'elle est dans le plan  $P_2$  sera normale à l'axe  $Ox'_2$  puisque les coordonnées  $x'_1$ ,  $x'_2$  et  $x'_3$  sont des coordonnées normales et, du fait qu'elle est aussi dans le plan  $P_3$ , sera également normale à l'axe  $Ox'_3$  et donc au plan  $Ox'_2x'_3$ .

Remarquons que l'orientation de la vitesse  $\bar{v}$  suivant le rayon-vecteur  $\bar{r}$  a bien pour conséquence que la trajectoire est rectiligne et qu'il ne s'agit pas simplement d'une tangente passant par l'origine.

En effet si on dérive les relations (1) par rapport au temps on voit que l'accélération  $\frac{d\bar{v}}{dt}$  est reliée à la vitesse  $\bar{v}$  par la même loi linéaire que celle reliant  $\bar{v}$  à  $\bar{r}$ . Si donc pour une certaine nébuleuse la vitesse  $v$  est à un instant donné orientée suivant  $\bar{r}$ , l'accélération le sera aussi. Comme toutes les dérivations successives de (1) reproduisent également la même loi, les dérivées vectorielles successives de  $\bar{r}$  seront, pour la nébuleuse en question, orientées également suivant  $\bar{r}$ , d'où résulte qu'il s'agit bien d'une trajectoire rectiligne.

Ces diverses conclusions ne sont évidemment valables qu'en première approximation tout comme les relations (1) et uniquement endéans les limites de validité de l'espace-temps osculateur, lesquelles s'étendent relativement loin vu que l'écart non-euclidien pour cent millions d'années-lumière n'atteint pas le millième.

---



# Les définitions dans l'Ancienne Sphérique

PAR

**J. MOGENET**

---

On sait, depuis les recherches de Heiberg, de Hultsch et de Björnbo (1), que les Sphériques de Théodose, ouvrage rédigé au deuxième ou premier siècle avant notre ère, ne sont qu'une réédition d'un traité antérieur, publié sans doute dans la première moitié du quatrième siècle; des savants ont même avancé le nom d'Eudoxe comme étant l'auteur de ce traité primitif, nulle part attesté mais dont l'existence paraît certaine et qu'on appelle, faute d'indication plus précise, l'Ancienne Sphérique (2). Grâce à d'habiles comparaisons avec les Phénomènes d'Euclide et le traité de la Sphère en mouvement d'Autolycus, on est même parvenu à déterminer avec plus ou moins de précision le contenu minimum de ce traité disparu et à établir du même coup la part qui revient à Théodose dans l'établissement de ses Sphériques. Mais ce travail de reconstitution a laissé de côté comme négligeables les définitions qui introduisaient à l'étude des propositions sphériques; Björnbo signale bien, à vrai dire, que les définitions qui figurent dans le traité de Théodose ont un équivalent dans le *De Sphaera quae movetur* d'Autolycus (3); mais c'est là une affirmation que ne vient étayer aucune preuve.

Que des définitions aient figuré dans l'ancien traité, on ne peut guère en douter. Euclide, à la fin du quatrième siècle, a employé le procédé, et ses *Eléments* s'ouvrent sur une série impressionnante, sinon exhaustive, de définitions, postulats et axiomes; Autolycus, plus proche encore de l'auteur de l'Ancienne Sphérique, inaugure son *De Sphaera* par deux définitions. L'exemple de ces deux mathématiciens, renforcé peut-être par le silence relatif d'Autolycus qui se contente de définir le mouvement uniforme de la sphère et ne dit

---

(1) J. L. HEIBERG, *Literargeschichtliche Studien über Euklid*, Leipzig, 1882, p. 41-52; F. HULTSCH, *Autolykos und Euklid*, dans *Berichte über die Verhandl. der königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig*, Philolog.-hist. Klasse, XXXVIII (1886), II, p. 128-155; A. BJÖRNBO, *Studien über Menela's Sphärik*, Leipzig, 1902, p. 56 ss.

(2) L'expression est de P. TANNER, *La géométrie grecque*, Paris, 1887, p. 34.

(3) *Op. cit.*, p. 136.

rien de la sphère considérée absolument <sup>(4)</sup>, encourage à croire à l'existence de définitions en tête de l'Ancienne Sphérique.

En gros, on peut prévoir sans crainte d'erreur qu'elles correspondent à celles de Théodose : d'une œuvre à l'autre, les notions fondamentales n'ont pas subi de modifications essentielles; et si le texte de la première ne nous est pas parvenu, du moins peut-on croire qu'il ne devait pas différer sensiblement de celui du rééditeur. Essayons toutefois de préciser davantage.

\* \* \*

Théodose définit d'abord la sphère. C'est, dit-il, « une figure solide comprise sous une surface unique, à la rencontre de laquelle toutes les droites, tombant d'un seul des points situés à l'intérieur de la figure, sont égales entre elles » <sup>(5)</sup>. Autolycus ne définit nulle part la sphère; mais dans la première proposition du *De Sphaera quae movetur*, voulant déterminer le comportement des points situés à sa surface, il fait passer un plan par l'un quelconque de ces points et l'axe de la sphère; du grand cercle ainsi obtenu, il prend la moitié et la fait pivoter autour de l'axe immobile, sans spécifier d'ailleurs que, ce faisant, il obtient la sphère. Il s'exprime de la sorte :

« Ἐὰν δὲ μενούσης τῆς AB εὐθείας περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, κτλ. » <sup>(6)</sup>.

D'autre part, au XI<sup>ème</sup> livre des *Eléments*, Euclide définit la sphère :

« Σφαῖρά ἐστιν, ὅταν ἡμικυκλίου μενούσης τῆς διαμέτρου περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα » <sup>(7)</sup>.

L'identité des deux formules est d'autant plus frappante qu'Autolycus n'emploie les verbes ἀποκατίσταιμι et περιφέρομαι qu'en ce seul endroit.

Il ne s'agit pas de déterminer jusqu'à quel point Théodose doit à son propre génie la définition qu'il adopte — déjà Aristote parle de la sphère, la plus parfaite des figures solides, car seule elle est com-

<sup>(4)</sup> Un copiste peu consciencieux du XIV<sup>ème</sup> siècle a voulu suppléer à ce silence en insérant à la suite des deux définitions d'Autolycus celles d'axe et de pôles de la sphère (*Parisinus Gr. 2448*, 79 v<sup>o</sup>).

<sup>(5)</sup> *Theod. Sphaer. I, def. 1*, ed. HEIBERG, Berlin, 1927, p. 2, 2-4.

<sup>(6)</sup> « Et si la droite AB restant immobile, le demi cercle emporté revient à nouveau à ce même point à partir duquel il a commencé son mouvement, etc. » (*Autolyci. De Sphaera quae movetur*, ed. HULTSCH, Leipzig, 1885, p. 4, 12 ss.)

<sup>(7)</sup> « La sphère est la figure obtenue lorsque le diamètre d'un demi-cercle restant immobile, le demi-cercle emporté revient à nouveau à ce même point à partir duquel il a commencé son mouvement » (*Euclidis Elementa*, ed. HEIBERG, Leipzig, 1885, t. IV, p. 4, 21-23).

prise sous une surface unique <sup>(8)</sup> — , mais bien de souligner la divergence de conception qui se manifeste entre d'une part, Théodose, et de l'autre, Autolycus et Euclide. L'accord de ces deux derniers, renforcé par le fait qu'Autolycus ne vise pas à donner une définition *ex professo* (un emprunt éventuel de la part d'Euclide est donc à rejeter par le fait même) et emploie des termes jamais repris ailleurs, semble indiquer chez eux une utilisation littérale de l'Ancienne Sphérique, source commune. Sans doute Théodose s'en est-il écarté parce qu'il l'estimait incomplète, négligeant un élément essentiel, à savoir l'égalité de toutes les droites menées du centre de la sphère à sa surface; il l'a entièrement remaniée, pour en arriver à un texte qui n'offre plus avec son original aucun point de contact.

Ayant sommairement défini le centre de la sphère, Théodose aborde ensuite la notion de diamètre. Le texte qu'il en donne ne va pas sans provoquer l'étonnement. On y lit en effet que « le diamètre de la sphère est une droite quelconque passant par le centre et prolongée de part et d'autre jusqu'à la surface de la sphère, autour de laquelle droite immobile tourne la sphère » <sup>(9)</sup>. Pourquoi cette notation du mouvement de la sphère au seuil d'un traité qui n'étudie que la sphère immobile ? Est-ce cette fois un vestige de l'Ancienne Sphérique ? On comprendrait que l'ancien traité s'exprimât de la sorte, étant donné que la sphère garde encore pour lui un contact direct avec le réel, c'est-à-dire les phénomènes astronomiques et le mouvement du monde <sup>(10)</sup>; mais Théodose n'en est plus là, s'il a, comme le prétend Jean Philopon, « séparé la figure sphérique de toute réalité » <sup>(11)</sup>, tandis qu'Autolycus, à en croire le même commentateur, reste « plus partiel et plus proche du physique » <sup>(12)</sup> : le *De Sphaera* aide-t-il à résoudre la question ?

Autolycus ne parle qu'une seule fois du diamètre de la sphère; il désigne ainsi une droite qui joint les points d'intersection de deux grands cercles <sup>(13)</sup>, sans spécifier que cette droite passe par le centre de la sphère. L'un des points d'intersection est pôle de la sphère, l'autre pas (il s'agit d'une démonstration par l'absurde). Dans tous les autres cas, Autolycus parle d'axe de la sphère; il en donne même une définition implicite, témoin cette construction de la première proposition. « Soit une sphère dont l'axe est la droite AB, les pôles

<sup>(8)</sup> *De Caelo*, II, 4, 2.

<sup>(9)</sup> *Theod. Sphaer. I, def. 3*, ed. HEIBERG, p. 2, 3-5, trad. P. VER ECKE, *Théodose de Tripoli, Les Sphériques, traduits pour la première fois du grec en français*, Paris, 1927, p. 1.

<sup>(10)</sup> Cfr P. VER ECKE, *op. cit.*, p. IX.

<sup>(11)</sup> *In Aristotelis physicae auscultationis librum II*, cité par HEIBERG, *Literargeschichtliche Studie über Euklid*, p. 41, n. 1.

<sup>(12)</sup> *Ibidem*.

<sup>(13)</sup> Ed. HULTSCH, p. 8, 16.

les points A et B, et supposons qu'elle tourne uniformément autour de son axe AB » (14); il signale en outre que la droite AB est immobile (15). Comprenons donc que pour Autolycus l'axe de la sphère est une droite fixe, dont les extrémités sont les pôles de la sphère et autour de laquelle tourne la sphère : ce qui revient à peu près à la définition que donne Théodose, lui, du diamètre de la sphère.

La chose est plus claire encore quand on trouve chez Théodose, en guise de quatrième définition, celle des pôles de la sphère, ainsi énoncée : « les pôles de la sphère sont les extrémités de l'axe » (16). D'où nouvelle surprise, puisque dans tout le traité des Sphériques, il ne sera jamais question de pôles de la sphère ni d'axe.

Dès lors, comment justifier ces deux définitions de Théodose ? Euclide met de la lumière dans le débat, puisqu'il définit justement l'axe de la sphère : « droite immobile autour de laquelle tourne le demi-cercle (dont la révolution engendre la sphère) » (17), et le diamètre de la sphère : « droite quelconque passant par le centre et prolongée de part et d'autre jusqu'à la surface de la sphère » (18). Nous y trouvons sous deux notions différentes des éléments que Théodose a réunis dans la seule définition du diamètre de la sphère.

Il est ainsi possible de reconstituer prudemment l'histoire de ces définitions : l'Ancienne Sphérique possédait sans doute les trois définitions de diamètre, d'axe (qui n'est qu'un diamètre privilégié) et de pôles de la sphère. Le texte d'Autolycus en est un témoin assez fidèle, encore qu'implicite; celui d'Euclide également, à cette différence près que les pôles, dont il n'a pas besoin, n'y figurent pas; et Théodose, qui n'a plus besoin ni d'axe ni de pôles de la sphère, a maladroitement confondu les notions de diamètre et d'axe (19), et conservé sans raison celle de pôles.

Il n'en va pas de même de la notion de pôle d'un cercle, que Théodose définit : « point à la surface de la sphère, d'où toutes les droites qui tombent sur la circonférence de ce cercle sont égales entre elles » (20). Qu'Autolycus l'ait connue en des termes à peu près semblables dans l'Ancienne Sphérique, c'est ce qui ressort d'une allusion rapide du *De Sphaera*. A la sixième proposition, il énonce que deux droites menées d'un point  $\Delta$  à la circonférence d'un cercle donné sont

---

(14) Ed. HULTSCH, p. 2, 17 — 4, 2.

(15) *Ibidem*, p. 4, 13.

(16) *Theoã. Sphaer. I, def. 4*, ed. HEIBERG, p. 2, 9.

(17) *Euclid. Elem. XI, def. 15*, ed. HEIBERG, IV, p. 4, 24 s.

(18) *Ibidem*, p. 6, 1-3.

(19) C'est si vrai que la tradition manuscrite hésite entre axe et diamètre : cfr apparat de l'éd. HEIBERG, p. 2, in 6.

(20) *Theod. Sphaer. I, def. 5*, ed. HEIBERG, p. 2, 10 ss., trad. VER ECKE, p. 1 s.



égales entre elles, car, dit-il, le point  $\Delta$  est pôle du cercle <sup>(21)</sup>; à la septième proposition, en présence d'une construction voisine, il se contente de signaler l'égalité des deux droites, sans plus en donner la raison <sup>(22)</sup>.

La notion d'inclinaison semblable demande un peu plus d'explications. Pour Théodose, l'inclinaison d'un plan par rapport à un autre est semblable à celle d'un troisième par rapport à un quatrième « lorsque les droites menées à angles droits sur la section commune des plans, aux mêmes points dans chacun des plans, comprennent des angles égaux » <sup>(23)</sup>. Or, à la huitième proposition du *De Sphaera*, Autolycus veut établir que les cercles parallèles sont semblablement inclinés par rapport à l'horizon. Il prouve d'abord que deux droites,  $KM$  et  $H\Theta$ , sont perpendiculaires à  $AB$ , section commune des deux plans auxquels appartiennent respectivement les deux droites, celui de l'horizon et celui d'un des parallèles; puis il conclut que l'angle formé par ces deux droites est l'inclinaison d'un des plans par rapport à l'autre :

« ἡ ὑπὸ τῶν  $KM\Theta$  γωνία ἡ κλίσις ἐστὶν ἐν ἣ κέκλιται ὁ  $AB$  κύκλος πρὸς τὸν  $AB\Delta\Gamma$  κύκλον » <sup>(24)</sup>.

Il procédera de la même manière pour l'autre parallèle et prouvera que les angles sont égaux, donc que les deux cercles parallèles sont semblablement inclinés par rapport à l'horizon. Ainsi la démonstration se conforme, point par point, à la définition d'inclinaison semblable que donne Théodose.

Mais il y a plus : traitant du même sujet, celui-ci emploie la même formule pour notifier la même conclusion; ainsi il dit :

« ἡ ἄρα ὑπὸ  $K\Xi A$  γωνία ἡ κλίσις ἐστὶν ἐν ἣ κέκλιται τὸ  $BK\Delta$  ἐπίπεδον πρὸς τὸ  $AB\Gamma\Delta$  ἐπίπεδον » <sup>(25)</sup>.

Cette identité de concept et d'expression chez Autolycus et Théodose ne peut s'expliquer que si tous deux ont puisé à la même source, l'Ancienne Sphérique. Notons toutefois que cette dépendance n'est pas absolue, puisqu'elle ne va pas jusqu'à la soumission littérale au texte de base. Ainsi s'expliquent les légères divergences dans les formules précédemment rapprochées : là où Autolycus, par exemple, parle de cercles, Théodose parle de plans, bien que lui aussi étudie

<sup>(21)</sup> Ed. HULTSCH, p. 20, 26.

<sup>(22)</sup> *Ibidem*, p. 24, 14.

<sup>(23)</sup> *Theod. Sphaer. I*, def. 6, ed. HEIBERG, p. 2, 13-16, trad. VER ECKE, p. 2.

<sup>(24)</sup> « L'angle  $KM\Theta$  est l'inclinaison selon laquelle le cercle  $AB$  est incliné par rapport au cercle  $AB\Delta\Gamma$  » (ed. HULTSCH, p. 28, 1 s.)

<sup>(25)</sup> *Theod. Sphaer. II*, 21, ed. HEIBERG, p. 92, 29 s.

des cercles semblablement inclinés. Ailleurs encore, au lieu de κλίσις ἐν ᾗ κέκλιται, Autolycus dira, minime variante, κλίσις ἣν κέκλιται <sup>(26)</sup>.

Mais si l'accord fondamental est réel chez Autolycus et Théodose, il n'en est pas tout à fait de même pour Euclide. Celui-ci, en effet, a non seulement clarifié le sujet en le divisant, définissant d'abord la notion d'inclinaison, puis celle d'inclinaison semblable <sup>(27)</sup>, mais en outre a jugé que telle quelle la notion d'inclinaison semblable était ambiguë; et il a précisé qu'il s'agissait de l'angle *aigu* compris entre les perpendiculaires sur la section commune <sup>(28)</sup>. Quoi qu'il en soit de cette précision qui n'existait probablement pas dans l'Ancienne Sphérique — le silence d'Autolycus <sup>(29)</sup> et de Théodose en semble un témoignage — et qui n'est donc imputable qu'au seul Euclide, la parenté réelle qui se manifeste entre ces textes conservés paraît être le reflet de ce qui devait être le texte de l'Ancienne Sphérique.

Une dernière définition enfin figure dans les Sphériques de Théodose, en tête du deuxième livre : celle de cercles tangents. « Dans une sphère, dit-il, des cercles sont dits tangents lorsque la section commune des plans est tangente aux deux cercles » <sup>(30)</sup>. C'est là une notion précise qui en suppose une autre, celle de droite tangente à un cercle. A ce propos, Euclide dit seulement qu'« une droite est dite tangente à un cercle lorsqu'elle touche ce cercle et, prolongée, ne le coupe pas » <sup>(31)</sup>. Quant à Autolycus, s'il fait plusieurs fois usage de cercles tangents (dans les 6<sup>me</sup>, 8<sup>me</sup> et 9<sup>me</sup> propositions), rien dans son texte ne fait allusion à une section commune tangente aux cercles; on dirait plutôt qu'il s'agit d'une notion empirique; à peine trouve-t-on trace dans son œuvre d'une distinction précise entre cercle tangent à un autre et cercle coupant un autre <sup>(32)</sup>. Ici encore sans doute reste-t-il fidèle à l'Ancienne Sphérique; et le texte de Théodose marque probablement un progrès par rapport à ses devanciers.

\* \* \*

<sup>(26)</sup> Ed. HULTSCH, p. 28, 9 et 11.

<sup>(27)</sup> *Euclid. Elem. XI, def. 6-7*, ed. HEIBERG, IV, p. 2, 18 — 4, 3.

<sup>(28)</sup> P. VER ECKE, *op. cit.*, p. 68, n. 3, signale que la définition d'Euclide n'a cependant pas été admise par les géomètres arabes, et notamment chez Thabit-ben-Corrah, traducteur de l'ouvrage de Théodose, pour lesquels l'inclinaison est au contraire l'excès de l'angle droit sur l'angle aigu (dièdre).

<sup>(29)</sup> Une scolie du *De Sphaera*, ed. HULTSCH, p. 26, 29 ss., cite la définition d'Euclide; une autre, p. 28, 17 ss., s'attarde à démontrer que les angles sont bien des angles aigus : tentatives sans doute pour mettre d'accord Autolycus et Euclide.

<sup>(30)</sup> *Theod. Sphaer. II, def.*, ed. HEIBERG, p. 42, 2 s.

<sup>(31)</sup> *Euclid. Elem. III, def. 2*, ed. HEIBERG, I, p. 164, 4-6.

<sup>(32)</sup> Ed. HULTSCH, p. 30, 11-13.

Telle semble, au terme de ces comparaisons et recoupements de textes, la teneur des définitions de l'Ancienne Sphérique. Les six qui figurent dans l'œuvre de Théodose figuraient déjà vraisemblablement dans l'ancien traité; peut-être même faut-il y ajouter deux autres, celles d'axe de la sphère et d'inclinaison. Autolycus en paraît le témoin le plus fidèle, parce que le plus passif; il se borne à utiliser telles quelles des notions fixées antérieurement, sans chercher à les discuter ou à les perfectionner. Euclide réagit davantage: s'il témoigne passivement lui aussi d'une définition « mobile » de la sphère, il distingue clairement axe et diamètre, sans plus s'embarrasser des pôles de la sphère; et il ajoute à la notion d'inclinaison semblable une précision utile. Enfin Théodose, deux siècles plus tard, rééditant le traité primitif, peut-être déjà remanié entretemps, fait preuve d'une certaine personnalité à l'égard de son lointain devancier: la notion de sphère est envisagée par lui sous un angle nouveau, peut-être aussi celle de cercles tangents. Ailleurs son intervention est moins heureuse, puisqu'il ne tient pas compte des progrès réalisés par Euclide et confond malencontreusement diamètre et axe, et conserve les pôles de la sphère, désormais inutiles. Certes ces traits ne suffisent pas à caractériser les trois mathématiciens; du moins en esquissent-ils une physionomie qu'une étude minutieuse de l'ensemble des propositions sphériques ne ferait que renforcer.

---

Physique et Chimie

Sur la précision et l'emploi des filtres colorés  
et spécialement sur les filtres en gélatine.

PAR

A. BIOT

I. GÉNÉRALITÉS. — On utilise de plus en plus des filtres colorés dans des appareils scientifiques, techniques ou autres. Citons seulement comme exemples les appareils photographiques et les instruments de colorimétrie trichromatique. En principe ces filtres sont d'épaisseur constante. Ils sont utilisés soit à surface constante soit à surface variable et dans ce dernier cas, servent en général de dispositif de mesure. On s'arrange alors pour que la portion de surface utilisée dans toute mesure soit repérée sur une échelle linéaire. (Exemples : colorimètres trichromatiques de Guild et de Donaldson.)

Les filtres colorés sont de trois sortes : filtres liquides, formés d'une solution colorée placée dans une cuve (épaisseur de l'ordre du centimètre) dont les parois utiles sont en principe planes et parallèles; filtres en verres colorés (épaisseur de l'ordre de quelques millimètres); filtres en gélatine (épaisseur de l'ordre de 0,1 mm), formés d'une feuille de gélatine à faces en principe planes et parallèles et colorée par une ou plusieurs substances organiques (couleurs dites d'aniline). A l'usage, ces films de gélatine sont collés au baume de Canada entre des lames de verre.

Les premiers, que l'on peut en général établir dans des conditions de précision élevées, sont aussi facilement reproductibles mais ils présentent l'inconvénient d'une manipulation délicate. Les seconds, d'emploi commode, et qui peuvent aussi être établis avec une haute précision (planéité et parallélisme des surfaces) n'offrent malheureusement pas un choix suffisamment étendu pour tous les besoins de la pratique; on peut aussi se demander s'ils présentent toujours une homogénéité suffisante. Les derniers enfin, peuvent présenter une immense variété, mais d'une part ils sont en général plus instables, dans les conditions d'emploi, que ceux des deux autres catégories, et d'autre part leur réalisation (planéité et parallélisme des faces) est délicate si l'on veut obtenir la haute précision requise dans des



cas difficiles. Ils possèdent par ailleurs un coefficient de température souvent plus faible que celui des autres filtres, réalisés avec des substances colorées non organiques.

Notre étude porte sur certaines conditions à réaliser quand on recherche la précision maximum. Elle ne fait pas double emploi avec un travail du même genre <sup>(1)</sup> cité dans le Rapport de 1935 du secrétariat du Comité d'étude sur la Colorimétrie de la Commission Internationale de l'Eclairage (C. I. E.) et un autre <sup>(2)</sup> cité dans le précédent.

## A. — FORMULES

2. FORMULES. — FILTRES D'OUVERTURE CONSTANTE. — Soit d'abord un filtre à faces planes et parallèles, dont on n'utilise qu'une portion toujours la même, traversé par un faisceau de rayons peu ouvert que l'on peut considérer en fait comme formé de rayons parallèles, normaux au filtre.

a. Rappelons la formule classique. Elle est obtenue en décomposant le filtre en tranches infiniment minces par des plans parallèles aux faces. On considère un faisceau incident monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$ .

On pose pour une quelconque des tranches que l'on vient de définir :

$$d\varphi = -\varphi \alpha dx \quad (1)$$

$\varphi$  étant le flux incident,  $x$  l'épaisseur et  $\alpha$  un facteur de proportionnalité. Intégrons; il vient :

$$\log_n \varphi - \log_n \varphi_0 = \alpha(x_0 - x)$$

Faisons correspondre  $\varphi_0$  à  $x = 0$ . Il suit :

$$\varphi = \varphi_0 e^{-\alpha x} \quad (2)$$

que l'on peut écrire :

$$\text{Log}_{10} \frac{\varphi}{\varphi_0} = -0,434 \alpha x$$

$\frac{\varphi}{\varphi_0}$  est le facteur de transmission  $\tau$  du filtre pour la longueur d'onde  $\lambda$ ;

—  $\text{Log } \tau$  en est la densité  $D$ .

$$D = -\text{Log}_{10} \frac{\varphi}{\varphi_0} = -\text{Log}_{10} \tau = 0,434 \alpha x \quad (3)$$

<sup>(1)</sup> H. NAUMANN. Mit welcher Genauigkeit lassen sich Lichtfilter herstellen ? *Phot. Ind.*, 32, 1932, 363-4.

<sup>(2)</sup> C. EMMERMANN. Herstellung von Filterfolien. *Phot. Ind.* 30, 1932, 987-9.

Par application de la loi de Beer, toujours applicable dans un domaine étroit de la concentration, on peut écrire de la même façon :

$$\tau = e^{-\alpha' cx} \quad (4)$$

$$D = -\text{Log}_{10} \tau = 0,434 \alpha' cx \quad (5)$$

si  $c$  représente la concentration de la substance colorante.

b. On tire de (5) :

$$\alpha' = \frac{D}{0,434 cx}$$

puis, de (4) :

$$\frac{d\tau}{\tau} = -\alpha' (c dx + x dc)$$

d'où :

$$\frac{d\tau}{\tau} = -D \frac{c dx + x dc}{0,434 cx} \quad (6)$$

c. Soit  $dx = 0$

$$\frac{d\tau}{\tau} = -D \frac{dc}{0,434 c}$$

Posons  $\frac{d\tau}{\tau} = 0,0025$ . Il vient, pour  $\left| \frac{dc}{c} \right|$ , les valeurs suivantes :

D	$\left  \frac{dc}{c} \right $
1	0.001
2	0.0005
3	0.0003

Si  $\frac{d\tau}{\tau}$  doit au plus être égal à 0.0025,  $\left| \frac{dx}{x} \right|$  doit au plus être égal, selon la valeur de D, à la valeur correspondante du tableau.

d. Soit  $dc = 0$

$$\frac{d\tau}{\tau} = -D \frac{dx}{0,434 x}$$

Si  $\frac{d\tau}{\tau}$  doit au plus être égal à 0.0025,  $\left| \frac{dx}{x} \right|$  doit au plus être égal, selon la valeur de D, à la valeur correspondante du tableau précédent.

Rappelons ici que l'on a aussi les correspondances suivantes :

$$\tau = 0,1, D = 1; \quad \tau = 0,01, D = 2; \quad \tau = 0,001, D = 3.$$

### 3. FORMULES. CAS OÙ L'ON UTILISE UNE LONGUEUR VARIABLE DU FILTRE.

a. Supposons d'abord que le filtre est d'épaisseur et de concentration du colorant constantes et que l'on modifie sa longueur par une extrémité seulement. Appelons 1 la longueur totale utilisable du filtre,  $l$  une longueur quelconque du filtre ( $l \leq 1$ ),  $\tau_0$  le facteur de transmission du filtre pour la longueur 1,  $\tau$  le même facteur pour la longueur  $l$ . On a :

$$\tau = \tau_0 l \quad (7)$$

Supposons maintenant que le filtre ne soit pas d'épaisseur constante. Si  $x$  est l'épaisseur « moyenne » applicable à la longueur 1, celle qui correspondra à la longueur  $l$  sera  $x + dx$ .

La relation précédente devra être écrite :

$$\tau = \tau_0 l + d\tau$$

avec :

$$d\tau = -\tau D \frac{1}{0,434} \frac{dx}{x}$$

On pourra prendre  $\tau$  proportionnel à  $l$  tant que  $d\tau$  se ra négligeable. On admettra en général que  $\frac{\tau}{d\tau}$  doit être plus petit qu'une certaine valeur fixée à l'avance. Si l'on admet 0.0025 pour cette valeur, les valeurs limites acceptables de  $\frac{dx}{x}$  se tirent du tableau donné plus haut.

b. Pour aller plus loin supposons que les faces du filtre soient planes mais fassent entre elles un prisme d'angle petit.

Soit d'abord l'arête du prisme parallèle à la direction suivant laquelle on mesure  $l$ . Dans ce cas la formule (7) est strictement applicable.

Supposons ensuite que cette arête soit perpendiculaire à la direction  $l$ . Soit  $x_0$  l'épaisseur la plus petite du filtre,  $x_1$  l'épaisseur la plus grande ( $l = 1$  par exemple).

Admettons que l'épaisseur « moyenne »  $x$  qui correspond à  $l = 1$  soit  $x = \frac{x_0 + x_1}{2}$

On voit facilement, dans ces conditions que pour l'épaisseur « moyenne » qui correspond à la longueur  $l$ , il s'introduit une variation d'épaisseur

$$dx = \frac{(x_1 - x_0)(1 - l)}{2}$$

Il en résulte

$$\frac{dx}{x} = \frac{x_1 - x_0}{x_1 + x_0} (1 - l) = \frac{x_1 + x_0}{2x} (1 - l)$$

d'où :

$$\frac{d\tau}{\tau} = \frac{D}{0,868} \frac{x_1 - x_0}{x} (1 - l)$$

$\frac{d\tau}{\tau}$  est maximum pour  $l = 0$ . Posant  $x = 0,1$  mm (cas des filtres en gélatine), il suit, pour  $\left| \frac{d\tau}{\tau} \right| = 0,025$

D	$x_1 - x_0$
1	$0,2 \mu$
2	$0,1 \mu$
3	$0,07 \mu$

Les nombres  $x_1 - x_0$  seraient 100 fois plus grands en général dans le cas d'un filtre liquide.

Telles sont, dans le cas particulier considéré, les variations totales permises dans l'épaisseur d'un filtre en gélatine.

Si l'arête du prisme est inclinée sur la direction  $l$ , il faut prendre comme angle effectif du prisme la composante suivant  $l$  de l'angle total.

c. Quel que soit l'angle du prisme,  $\frac{d\tau}{\tau}$  est nul si la diminution de longueur a lieu symétriquement à partir des deux extrémités à la fois.

d. Supposons maintenant que les faces du filtre ne soient plus planes. On peut le considérer comme formé de petits prismes jointifs dont l'arête est disposée d'une façon variable et quelconque.

$\frac{d\tau}{\tau}$  est en principe, ici, toujours différent de zéro.

Si les modifications à la planéité des faces n'affectent que des régions petites et irrégulièrement disposées il peut se faire que l'effet résultant soit négligeable. Si par exemple, pour toute valeur de  $l$ , les portions affectées du filtre représentent 1/10 seulement de la surface effectivement utilisée, les défauts du filtre peuvent être dix fois plus grands que ceux qui sont indiqués dans le tableau ci-dessus.



## II. — ÉTUDE EXPÉRIMENTALE DE FILTRES EN GÉLATINE

4. RÉALISATIONS DES FILMS EN GÉLATINE COLORÉE. — Il existe plusieurs méthodes. Nous donnons ici, rapidement, la méthode classique d'après von Hübl <sup>(1)</sup>.

On choisit une glace assez épaisse. On la dégraisse avec un mélange d'alcool et d'ammoniaque, et l'on enlève la poussière qui pourrait s'être déposée dessus. On coule alors sur sa face supérieure une couche de solution à 2 % de collodion dans laquelle on a incorporé 1 à 2 % d'huile de ricin. On assure l'horizontalité de la glace.

On prépare par ailleurs la solution de gélatine colorée. Pour cela on fait digérer pendant une demi-heure un poids connu de gélatine dans un peu d'eau distillée. On fait fondre au bain-marie sans dépasser une température de 40 à 50° C. On ajoute la quantité de substance colorante requise, puis de l'eau distillée pour que la concentration en gélatine soit de l'ordre de 6 à 10 %.

On verse alors la gélatine sur la plaque de verre. On égalise au besoin l'épaisseur avec un bâton de verre. On fait sécher rapidement dans un endroit sans poussière. Quand la gélatine est sèche on trace dedans un trait au canif le long des bords. La feuille se détache alors facilement. <sup>(2)</sup>

### 5. LES MÉTHODES D'ÉTUDE ,

a. Il est utile d'examiner le film au microscope ( $G = 20 \times$  environ). On décèle ainsi, avec un éclairage convenable, tous les défauts locaux importants : poussières, fils enrobés dans la masse, etc.

b. L'étude des variations d'épaisseur se fait convenablement en lumière monochromatique en se servant des franges d'égale épaisseur observées à l'aide du montage classique <sup>(3)</sup> qui permet l'observation normale à la surface étudiée.

Soient  $n_\lambda$  l'indice du film pour la radiation utilisée;

---

<sup>(1)</sup> A. VON HÜBL. Die Lichtfilter, mit besonderer Berücksichtigung der Lichtfilter für photographische Zwecke. 3<sup>te</sup> Aufl. W. Knapp, Halle (Saale) 1927.

<sup>(2)</sup> Si l'on dissout une même substance colorante dans l'eau et dans la gélatine et si l'on détermine chaque fois la courbe d'absorption de cette substance, on constate que dans le second cas la courbe d'absorption est décalée vers les grandes longueurs d'onde par rapport à celle du premier cas et d'une quantité très appréciable. Cela est dû à l'accroissement notable de l'indice ( $\Delta n = 0,13$  quand on passe de l'eau à la gélatine).

<sup>(3)</sup> CH. FABRY. Les applications des interférences lumineuses. Edition de la *Revue d'Optique*, 1923.

$\Delta e$  la différence d'épaisseur entre deux points;  
 $a$  le nombre de franges observées entre ces points;  
 $\lambda$  la longueur d'onde.

On a :

$$2n_{\lambda} \Delta e = a\lambda \quad (8)$$

D'où :

$$n = \frac{a\lambda}{2\Delta e} \quad (9)$$

$$\Delta e = \frac{a\lambda}{2n} \quad (10)$$

Il suffit ici de connaître  $\Delta e$  seulement d'une manière approchée. Pour appliquer la relation (10) il suffit donc de connaître  $n$  pour une radiation moyenne du spectre.

6. INDICE MOYEN DE LA GÉLATINE. — Nous avons préparé un film de gélatine incolore sensiblement prismatique. Entre deux points de ce film tels que  $\Delta e = 60 \mu$ , nous avons compté 296 franges pour la radiation jaune du sodium ( $\lambda = 589,3 m\mu$ ). Il en résulte, par (9)

$$n_{589.3} = 1,45.$$

La variation d'épaisseur  $\Delta e$  a été déterminée avec un palpeur sensible au micron.

#### 7. RÉSULTATS DE L'ÉTUDE DES FILTRES COLORÉS RÉALISÉS.

Voici les résultats de l'examen de plusieurs filtres du commerce.

a. Examen microscopique. Il révèle l'existence de poussières dont les plus grandes ont un diamètre de l'ordre de 0,05 mm ; de bouts de fils, détachés probablement du filtre, ayant jusque plusieurs millimètres de longueur ; de dépressions dont le diamètre ou la longueur peut atteindre 0,2 mm et qui entourent soit une poussière, soit un fil ou encore des inclusions formées probablement d'éléments de gélatine non fondus lors de l'échauffement de celle-ci.

b. Examen interférométrique. Il décèle les dépressions locales dont nous venons de parler, ainsi que les défauts prismatiques d'ensemble.

La relation (10) donne pour  $a = 1$ ,  $n = 1,45$

$$\Delta e = 0,203 \mu$$

Les franges d'égale épaisseur permettent donc de déceler des défauts de l'ordre de ceux qu'il convient de connaître.

Ceci posé, nous avons trouvé des films présentant 60 franges entre deux points distants de 70 mm, parfois notablement plus, parfois beaucoup moins. En fait d'ailleurs, et c'est normal, ces films n'étaient pas prismatiques, mais présentaient une région plus ou moins elliptique d'épaisseur plus grande qu'ailleurs, autour de laquelle l'épaisseur allait en diminuant quand la distance augmentait. Les franges, de forme elliptique en la région d'épaisseur maximum, devenaient, en s'écartant de cette région, approximativement circulaires.

## 7. CONCLUSIONS.

a. En ce qui concerne les filtres liquides la concentration et l'épaisseur doivent être assurées avec une précision de l'ordre de 1 ‰ près quand on désire obtenir une reproductibilité de l'ordre de 0,0025 près dans la transmission.

b. En ce qui concerne les filtres en gélatine colorée, d'épaisseur uniforme, utilisés dans des mesures de précision par variation de la surface, il convient :

d'utiliser des filtres en feuille, dont on peut étudier facilement les variations éventuelles d'épaisseur (1);

d'utiliser les franges d'égale épaisseur pour faire cette étude;

de choisir des films d'angle constant si la méthode de réalisation de ces films les réalise forcément prismatiques;

d'utiliser ces films en en faisant varier la longueur symétriquement à partir du milieu;

éventuellement d'étalonner l'échelle de mesure.

---

(1) Il conviendrait, semble-t-il, d'utiliser pour la fabrication de ces feuilles, la méthode indiquée par Goldberg (E. GOLDBERG. Der Aufbau des photographischen Bildes, 1922). Dans cette méthode la couche de gélatine coulée sur la glace de base, préparée selon la manière habituelle, est écrasée par une seconde glace recouverte d'une couche mince d'albumine. Des cales d'épaisseur égale assurent à la gélatine une épaisseur uniforme. Après la prise, la glace supérieure est détachée, ce qui se fait facilement. On continue alors l'opération comme à l'habitude. Des essais préliminaires que nous avons faits dans ce sens ne nous ont toutefois pas encore donné satisfaction.

*Note ajoutée à la correction.*

Depuis la rédaction de ce travail nous avons pu examiner des filtres préparés par la maison Gevaert (Mortsel-Anvers). Ces filtres possédaient des faces remarquablement parallèles.

# Note sur la mesure de l'activité de préparations radioactives

PAR

**G. GUÉBEN, J. GOVAERTS et A. D. M. STOPPANI.**

---

La teneur en radioélément d'une préparation radioactive s'effectue par la mesure du rayonnement émis par cette préparation. Lorsque le radioélément est pur, exempt de toute matière étrangère qui le dilue, et que son activité est grande, on peut réaliser des préparations suffisamment minces pour que soit pratiquement négligeable l'absorption du rayonnement par le radiateur lui-même. Mais quand l'activité est faible, particulièrement quand le radioélément est mélangé à une quantité appréciable de matière inerte, on peut être amené à employer des couches de matière d'épaisseur relativement notable : dans ce cas, il y a absorption du rayonnement dans la préparation même, et pour conclure à l'activité réelle de la préparation, on doit pouvoir corriger de cette absorption les résultats de mesure.

Diverses méthodes ont été proposées pour arriver à cette correction. Nous voudrions examiner deux d'entre elles et en comparer l'application.

La première méthode dont nous trouvons par exemple l'application dans un travail de T. E. Banks sur l'utilisation du radiosoufre en biochimie <sup>(1)</sup> procède de la façon suivante : on prépare une série de sources de fractions pesées d'un échantillon uniforme contenant le radioélément et on mesure les activités au compteur. On trace un graphique de l'activité observée en fonction de la masse totale de la source ou de la masse par cm<sup>2</sup>. On obtient ainsi une courbe qui est à peu près linéaire depuis l'origine jusqu'en un point correspondant à une certaine épaisseur de la source ; pour les valeurs plus grandes de cette épaisseur, la courbe s'incurve vers l'axe des abscisses.

S'il n'y avait pas absorption par le radiateur, on devrait avoir une courbe linéaire prolongeant la partie linéaire du début. On peut donc, de l'examen de la courbe déduire le pourcentage de correction à appliquer pour une masse donnée.

---

<sup>(1)</sup> T. E. BANKS. *The British Journal of Radiology*. August 1946, p. 333.



La seconde méthode nous a été indiquée par Monsieur Guéron, du Centre national de la Recherche scientifique française. On commence par tracer la même courbe que dans la première méthode. Celle-ci présente une première partie à peu près linéaire, puis tend vers un maximum, asymptote de la courbe. On trace ensuite la courbe de  $\log(I/\mu)$  en fonction de  $\mu$  : cette courbe est pratiquement linéaire et permet de déduire la valeur de  $I$  pour une très faible valeur de  $\mu$  telle qu'on puisse postuler que pour cette épaisseur l'absorption par le radiateur serait négligeable. En admettant à partir de cette valeur que l'activité corrigée de l'absorption est proportionnelle à  $\mu$  on arrive aisément à déduire la courbe des corrections.

Examinons d'un peu plus près cette seconde méthode. On peut admettre que dans les conditions pratiquement réalisées, l'absorption du rayonnement par le radiateur est exponentielle. Dans ces conditions, il est logique d'admettre que la variation de l'activité en fonction de l'épaisseur du radiateur est représentée par une expression de la forme.

$$I = M(1 - e^{-k\mu})$$

$M$  étant la valeur maxima de l'activité,  $k$  le coefficient d'absorption du milieu pour le rayonnement, et  $\mu$  l'épaisseur que nous exprimerons en  $g/cm^2$  (1). On voit aisément que cette relation peut s'écrire par développement en série

$$\frac{I}{\mu} = MK \left[ 1 - \frac{k\mu}{2} + \frac{(k\mu)^2}{3!} \dots \right]$$

et que pour des valeurs suffisamment petites de  $k\mu$ , on peut en première approximation remplacer cette relation par la suivante

$$\frac{I}{\mu} = MK e^{-\frac{k\mu}{2}}$$

d'où nous déduisons

$$\log_e \left( \frac{I}{\mu} \right) = \log_e MK - \frac{k\mu}{2}$$

Cette équation exprime bien la relation linéaire entre  $\log(I/\mu)$  et  $\mu$  observée par Guéron, relation qui doit être vérifiée pour les faibles valeurs de  $k\mu$ .

Afin de contrôler l'applicabilité des méthodes de correction, nous avons mesuré l'activité de préparations irradiées avec des neutrons en faisant varier systématiquement l'épaisseur de la préparation.

---

(1) On trouvera une démonstration de cette formule notamment dans M. HAISINSKY et B. PULLMAN. *J. Phys. et Radium* 8 (1947) 33.

Pour chaque substance, nous avons tracé d'une part la courbe de l'activité  $I$  observée en fonction de l'épaisseur  $\mu$  de substance évaluée en  $\text{g}/\text{cm}^2$ , d'autre part, la courbe de  $I/\mu$  en fonction de  $\mu$ . L'extrapolation de cette dernière courbe permet de déterminer la valeur de  $I$  qui correspondrait à une valeur très faible de  $\mu$ , par exemple  $\mu = 0,01 \text{ g}/\text{cm}^2$ , valeur pour laquelle on postule l'absorption pratiquement nulle par le radiateur. On en déduit la valeur de l'activité qu'aurait la préparation pour une plus grande valeur de  $\mu$  si l'absorption par le radiateur n'existait pas, et on conclut la correction qu'il y aurait lieu d'apporter à la mesure effectuée. Les tableaux suivants fournissent des exemples des résultats obtenus.

## I. — VANADIUM

Oxyde de Vanadium étendu en couche de  $5 \times 2,5 \text{ cm}^2$  dans des cuvettes de bakélite.

Conditions d'irradiation : source de neutrons (Ra + Be) placée dans la paraffine, surmontée de 2 mm de paraffine; échantillon irradié surmonté de 18 mm de paraffine.

Irradiation de 10 minutes, la mesure commence 1 minute après la fin de l'irradiation et dure 7 minutes.

N° de la cuvette	masse en g de $V_2O_3$	$\mu \text{ g}/\text{cm}^2$	$I \text{ mes}$	$I/\mu$	$I \text{ calc}$ $\mu=0,01$ $I=104$	% Corr. à ajouter
VI	0,2575	0,0206	274	13300	280	0
V	0,4995	0,0399	544	13634	560	2,9
VII	0,7480	0,0598	762	12742	840	10,2
VIII	1,000	0,0800	955	11937	1120	17,2
IX	1,498	0,1198	1432	11933	1680	17,3
XIV	2,000	0,1600	1733	10831	2240	29,2

## II. — CUIVRE

Cuivre en lames minces de 0,1 mm d'épaisseur.

Conditions d'irradiation : source de neutrons (Ra + Be) placée dans la paraffine surmontée de 1 mm de paraffine; lames de cuivre surmontées de 19 mm de paraffine.

Irradiation de 10 minutes, la mesure commence 1 ½ minutes après la fin de l'irradiation et dure 7 minutes.

<i>Epaisseur de cuivre</i>	$\mu \text{ g/cm}^2$	<i>I mes</i>	<i>I / \mu</i>	<i>I calc.</i> <i>I = 28,5 pour</i> $\mu = 0,01$	<i>% corr.</i> <i>à ajouter</i>
0,1 mm	0,0892	210	2354	254	21
0,2	0,1784	350	1961	508	45
0,3	0,2676	460	1718	762	65,6
0,4	0,3568	461	1292	1016	120
0,5	0,4460	466	1044	1271	172
0,7	0,6244	451	736	1780	300

### III. — ALUMINIUM

Aluminium en lames de minces 1 mm d'épaisseur.

Conditions d'irradiation : source de neutrons (Ra + Be) placée dans la paraffine, surmontée de 1 mm de paraffine ; lames d'aluminium surmontées de 19 mm de paraffine.

Irradiation de 10 minutes, la mesure commence 2 minutes après la fin de l'irradiation et dure 7 minutes.

<i>Epaisseur d'Al</i>	$\mu \text{ g/cm}^2$	<i>I mes</i>	<i>I / \mu</i>	<i>I calc.</i> <i>I = 22 pour</i> $\mu = 0,01$	<i>% corr.</i> <i>à ajouter</i>
1 mm	0,027	60	2222	60	0
3	0,081	133	1641	178	33
5	0,135	215	1592	297	38
7	0,189	224	1185	415	84
9	0,243	278	1144	534	92
11	0,297	303	1020	653	115
13	0,351	318	905	772	142
15	0,405	351	866	891	154
20	0,540	354	655	1118	216

Les figures 1, 2 et 3 montrent un exemple des courbes obtenues qui permettent de se rendre compte de la régularité des résultats, même dans le cas d'un rayonnement très absorbé dans le radiateur lui-même (cas du cuivre). Ces courbes ne sont valables que pour une installation de mesure donnée et doivent être recherchées pour chaque installation particulière. Elles ne sont données que comme exemple d'application d'une méthode rapide permettant d'obtenir la correction à apporter aux résultats de mesure.

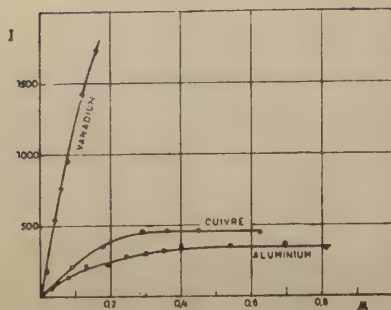


Fig. 1

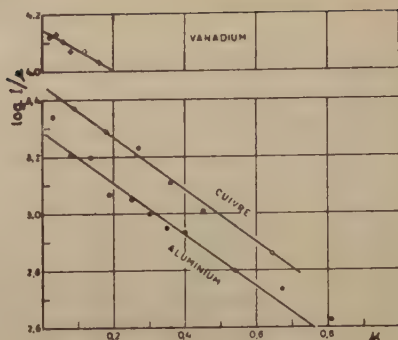


Fig. 2

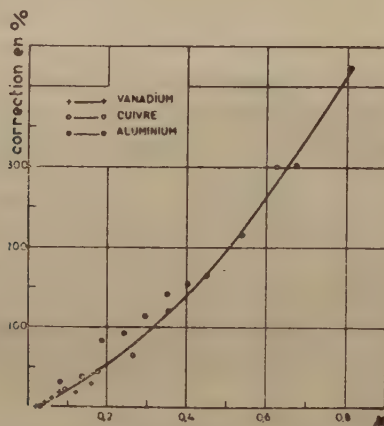


Fig. 3

Elles montrent de plus le danger de la première méthode ci-dessus. Nous voyons bien en effet que les courbes  $I = f(\mu)$  présentent une première partie à peu près rectiligne, mais il est difficile de préciser exactement à partir de quelle valeur de  $\mu$  la courbe s'écarte de la forme rectiligne. La méthode laisse subsister une grande indétermination que supprime la seconde méthode. Signalons en terminant que Haïssinsky et Pullmann<sup>(1)</sup> suggèrent, pour tenir compte de l'absorption et permettre la comparaison des résultats, de n'employer que des couches épaisses pour lesquelles la courbe  $I = f(\mu)$  a atteint certainement son palier. Cette technique fournit des résultats comparables mais elle impose cette sujétion d'exiger toujours des préparations très épaisses. En pratique, cette solution est de nature à entraîner de réelles difficultés que nous croyons pouvoir éviter en suivant la seconde méthode développée ci-dessus.

<sup>(1)</sup> HAÏSSINSKY et PULLMANN. *Loc. cit.*



# Azéotropes d'esters et d'oxydes <sup>(1)</sup>

PAR

**MAURICE LECAT**

Par souci de concision extrême, nous ne reproduisons pas la liste des abréviations dont il est usé dans nos travaux précédents <sup>(2)</sup>.

## OXYDE D'ÉTHYLÈNE (ÉPOXYÉTHANE) (10,75)

ZÉOTROPIE. — Form. M (31,7 ; 20,95), m.

### FURANNE (31,7)

B	Éb. B	$\Delta$	Éb. az.	$\delta$	% A	M	Bibl.
Formiate M.	31,7	0,0	<28,6	>3,1	—	—	o. s.   [ 1 ]

### OXYDE D'ÉTHYLE (ÉTHER) (34,6)

Formiate M.	31,7	2,9	28,2	3,5	44	4,4	Az., 1842   [ 2 ]
-------------	------	-----	------	-----	----	-----	-------------------

Z. — Form. É (54,15; 19,55), m. [5 : 0,5]; nitrate M (64,8; 30,2), m. — Acét. M (56,95; 22,35), l. [50 : 2,4].

## OXYDE DE MÉTHYLE ET DE PROPYLE (MÉTHOXYPROPANE) (38,85)

Formiate M.	31,7	7,15	<31,2	>0,5	>12	50 : 4,5	(1)   [ 3 ]
-------------	------	------	-------	------	-----	----------	-------------

(1) Az. (1918), \* n° 1847;  $d_4^{20} = 0,9402$  (dilatation).

### MÉTHYLAL (42,3)

Z. — Form. M (31,7; 10,6), m(?). [24 : 0,6]; form. É (54,15; 11,85), m.(?) [25 : 1,5]. — Acét. M (56,95; 14,65), l. [95 : 0,5  $\infty$ ]. — Nitrate M (64,8; 22,5), t. l.

### SILVANNE ( $\alpha$ MÉTHYLFURANNE) (63,8)

Z. — Acét. M (56,95; 6,85), m. — Form. É (54,15; 9,65), l.

(1) Cf. « Azéotropes d'oxydes » (première partie), ces *Annales*, série I, t. LXI, 1947, p. 153. Le travail annoncé (p. 159-160), « Azéotropes d'oxydes avec des esters, des halogénures ou des hydrocarbures » (*sans fonctions « mixtes »*), a dû malheureusement être scindé, par suite de diverses circonstances. Pour les nitrites, cf. ces *Annales*, t. LX, p. 163 (1946). Prochainement, on s'occupera des systèmes formés d'oxydes et d'halogénures ou hydrocarbures (*sans fonctions mixtes*).

(2) Cf. notamment le travail cité en note 1, ligne 1.

OXYDE D'ÉTHYLE ET DE PROPYLE (ÉTHOXYPROPANE) (63,85)

Nitrate M. | 64,8 | 0,95 | <61,5 | >2,35 | — | — | — | [ 4]  
Z. — Form. éthyle (54,15; 9,7), f. [5 : 0,1].

DIMÉTHYLACÉTAL (ACÉTAL DIMÉTHYLIQUE) (64,3)

Z. — Acét. M (56,95; 7,35), m. — Form. É (54,15; 10,15), 1.

FORMAL, MÉTHYLÉTHYLIQUE (65,9)

Nitrate M. | 64,8 | 1,1 | <63,9 | >0,9 | — | — | — | [ 5]  
Z. — Acét. M (56,95; 8,95), 1.

ÉTHYLAL (FORMAL ÉTHYLIQUE) (87,95)

Nitrate éthyle | 87,7 | 0,25 | 85,85 | 1,85 | 51 | 45 : 0,3 | (1) | [ 6]  
Carbon. méth. | 90,25 | 2,3 | 86,0 | 1,95 | 60 | Ann. Ch., n° 276 | [ 7]

(1) C. R. Acad. Sc. Paris, 222 (1946), p. 733, n° 58.

Z. — Isobut. M. (92,5; 4,55), t. f. — Form. P (80,85; 7,1), f. — Prop. M (79,85; 8,1), m. — Acét. É (77,1; 10,85), 1.; form. isobut. (98,2; 10,25), 1.

OXYDE DE PROPYLE (90,1)

Nitrate éthyle | 87,7 | 2,4 | <87,0 | >0,7 | <35 | Ann., Ch. n° 490 | [ 8]  
Acét. isoprop. | 89,5 | 0,6 | 88,5 | 1,0 | 50 | 50 : 0,8 | — | [ 9]  
Carbon. méth. | 90,25 | 0,15 | <87,5 | >2,6 | >42 | 50 : 2,0 | o. s. | [10]  
Isobut. méth. | 92,5 | 2,4 | 89,7 | 0,4 | 25 | — | o. s. | [11]

Z. — Form. P (80,85; 9,25), m. [5 : 0,7]. — Acét. É (77,1; 13,0), 1. [7 : 0,5]; prop. M (79,85; 10,25), 1. [5 : 0,5]; prop. É (99,1; 9,0), 1.; acét. P (101,6; 11,5), 1.; form. B (106,8; 16,7), 1. — Butyr. M (102,65; 11,55), t. 1.

DIOXANE (101,35)

Acétate propyl. | 101,6 | 0,25 | <100,8 | >0,55 | ... | — | — | [12]  
Butyr. méth. | 102,65 | 1,3 | <100,9 | >0,45 | ... | — | — | [13]  
Borate éthyle | 118,6 | 17,25 | 100,7 | 0,65 | 92? | Douteux | — | [14]

Z. — Form. isobut. (98,2; 3,15), m. — Nitrate P (110,5; 9,15), 1. — Nitrate É (87,7; 13,65), t. 1. [10 : — 0,25]. — Acét. isoprop. (89,5; 11,85), ∞ idéale; carbon. M (90,25; 11,1), ∞ id.; isobutyr. É (110,1; 8,75), ∞ id.; acét. isobut. (117,4; 16,05), ∞ id.

ACÉTAL (103,55)

Acétate propyl. | 101,6 | 1,95 | 101,25 | 0,35 | 32 ∞ 50 : 0,0 | (1) | [15]  
Butyrate M. | 102,65 | 0,9 | 102,0 | 0,65 | 45 ∞ 40 : -0,1 | (2) | [16]

(1) Bibl. 542, n° 1850; 569, n° 35. — (2) o. s. Bibl. 570, n° 125.

Z. — Form. B (106,8; 3,25), q.-az. — Nitrate É (87,7; 15,85), f.; prop. É. (99,1; 4,45), f. [10 : 0]; nitrate P (110,5; 6,95), f. — Carbon. M (90,25; 13,3), m.; form. isobut. (98,2; 5,35), m. [26 : -0,4]; isobutyr. É (110,1; 6,55), m. [90 : 0,0]. — Isobutyr. M. (92,5; 9,05), 1. — Acét. isoprop. (89,5; 14,05), t. 1. [5 : 0,0]; isoval. M (116,5; 12,95), t. 1.; acét. isobut. (117,4; 13,85), t. 1. — Form. P (80,85; 22,7), ∞ idéale.

FORMAL ÉTHYLPROPYLIQUE (113,7)

Nitrate propyl. | 110,5 | 3,2 | <110,0 | >0,5 | — | — | — | [17]

Z. — Isobut. É (110,1; 3,6), q.-az. — Prop. É (99,1; 14,6), idéale; acét. P (101,6; 12,1), idéale.

OXYDE D'ISOBUTYLE (122,3)

Borate éthyle	118,6	3,7	<116,8	>1,8	...	—	o. s.	[18]
Butyrate É.	121,5	0,8	120,5	1,0	80	—	o. s.	[19]
Nitrate isobut.	123,5	1,2	<121,0	>1,3	...	—	—	[20]
Form. isoamyl.	123,8	1,5	121,5	0,8	35	—	o. s.	[21]
Carbon. É	126,5	4,2	<120,8	>1,5	>35	—	—	[22]

Z. — Acét. B (126,0; 3,7), q.-az. — Acét. isobut. (117,4; 4,9), f. — Isovalér. M (116,5; 5,8), m. [5 : 0,2]. — Isobut. É (110,1; 12,2), l. [5 : 0,0]; isoval. É (134,7; 12,4), l. — Form. B (106,8; 15,5), ∞ idéale.

PARALDÉHYDE (124,35)

Silicate M.	121,8	2,55	<121,3	>0,5	—	—	—	[23]
Nitrate isobut.	123,5	0,85	<122,8	>0,7	—	—	—	[24]
Form. isoamyl.	123,8	0,55	123,0	0,8	44	44 : 0,9	( <sup>1</sup> )	[25]
Acétate B.	126,0	1,65	124,25	0,1	91 ∞	50 : -0,1	( <sup>2</sup> )	[26]

(<sup>1</sup>) \* Bibl. 542, n° 882 ('16); 568g, n° 75 ('36). — (<sup>2</sup>) *Ann. Ch.*, n° 6.

Z. — Butyr. É (121,5; 2,85), f. [10 : 0,1]; carbon. É (126,5; 2,15), f. [61 : 0,1]. — Acét. isobut. (117,4; 6,95), m. — Isoval. M (116,5; 7,85), l.; isobutyr. P (134,0; 9,65), l.; isoval. É (134,7; 10,35), l. — Prop. isobut. (137,5; 13,15), t. l.

FORMAL PROPYLIQUE (137,2)

Z. — Isobut. P (134,0; 3,2), q.-az. — Carbon. É (126,5; 10,7), f. — Acét. B (126,0; 11,2), l.

OXYDE DE BUTYLE (142,4)

Acét. isoamyle	142,1	0,3	<141,2	>0,9	>45	40 : 0,2	*568g,	[27]
Butyr. propyle	143,7	1,3	<142,0	>0,4	>55	—	— [n° 70]	[28]

Z. — Valér. n. É. (145,45; 3,05), q.-az. — Prop. isobut. (137,5; 4,9), f.; prop. B (146,8; 4,4), f. — Isobut. P (134,0; 8,4), m. [5 : 0,1]; isoval. É (134,7; 7,7), m.; isobut. i. B (148,6; 6,2), m.; acét. A (148,8; 6,4), m. — Isoval. P (155,7; 13,3), l.

ORTHOFORMIATE D'ÉTHYLE (145,75)

Z. — Isovalér. É (134,7; 11,05), ∞ idéale; isovalér. P (155,7; 9,95), ∞ idéale. — Acét. isoamyle (142,1; 3,65), l. n. [10 : — 0,2 ∞].

ANISOLE (153,85)

Isovalér. P	155,7	1,85	<153,6	>0,25	—	80 : 0,1	o. s. ( <sup>1</sup> )	[29]
Oxalate M	164,45	10,6	153,65	0,2	85 ∞	72 : 17	( <sup>2</sup> )	[30]

(<sup>1</sup>) \* Bibl. 558, n° 8; \*568g, n° 71. — (<sup>2</sup>) \*Bibl. 542, n° 1853 ('18); 549, n° 64.

Z. — Butyr. i. B (156,9; 3,05), q.-az. [90 : 0,0]. — Nitrate i. A (149,75; 4,1), f. [86 : 1,3; 16 : — 0,2 ∞]. — Isobutyr. i. B (148,6; 5,25), m. [5 : 0,0]; prop. i. A (160,7; 6,85), m. [95 : 0,0]; diacét. éthylidène (168,5; 14,65), m. [43 : 0,4] [*Ann. Ch.*, p. 169]; silicate É (168,8; 14,95), m. [84 : 0,3]. — Prop. B (146,8; 7,05), l. [5 : 0,1] [Bibl. 568g, n° 263]; malon. M (181,4; 27,55), l.; oxal. É (185,65; 31,8), l. [*Ann. Ch.*, p. 187]. — Acét. i. A (142,1; 11,75), ∞ idéale [5 : 0,1] [Bibl., 560, n° 250]; butyr. P. (143,7; 10,15), ∞ idéale [5 : 0,0] [Bibl. 568g, n° 240]. — Butyr. B (166,4; 12,55), idéale; isoval. i. B (171,2; 17,35), idéale.

FORMAL ISOBUTYLIQUE (163,8)

Z. — Prop. i. A (160,7; 3,1), q.-az. — Isoval. P (155,7; 8,1), m. — Nitrate i. A (149,75; 14,05), l.

OXYDE DE MÉTHYLE ET DE BENZYLE (167,8)

Oxalate méthyl.	164,45	3,35	<161,9	>2,55	>40	—	o. s.	[31]
Butyrate B.	166,4	1,4	166,0	0,4	30	—	—	[32]
Diacét. éthyli-	168,5	0,7	164,0	3,8	52	50 : 2,5	( <sup>1</sup> )	[33]
Silicate É.[dène]	168,8	1,0	<165,5	>2,3	...	—	o. s.	[34]

(<sup>1</sup>) *Ann. Chim.*, 1946, (l. c.), n° 162.

Z. — Isoval. isobut. (171,2; 3,4), t. f. — Malon. M (181,4; 13,6), f. — Prop. i. A (160,7; 7,1), m.; oxal. É (185,65; 17,85), m. [*Ann. Ch.*, p. 187]; diacét. glycol (186,3; 18,5), m. — Butyr. i. A (181,05; 13,25), t. l.

PHÉNÉTOLE (170,45)

Oxal. M [dène]	164,65	6,0	161,35	3,1	30	—	( <sup>1</sup> )	[35]
Diacét. éthyli-	168,5	1,95	164,5	4,0	44	50 : 3,0	( <sup>2</sup> )	[36]
Silicate d'É	168,8	1,65	<166,0	>2,8	...	—	—	[37]
Isobutyr. i. A	169,8	0,65	169,2	0,6	40?	—	—	[38]
Isovalér. i. B	171,2	0,75	170,1	0,35	65	77 : 1,0	561 n° 66	[39]
Acét. hexyle	171,5	1,15	169,9	0,45	<75	80 : 0,3	( <sup>3</sup> )	[40]
Malonate M	181,4	10,95	169,9	0,55	77	77 : 2,1	549 n° 28	[41]

(<sup>1</sup>) \*Bibl. 542, n° 1855 ('18); *C. R. Ac. Sc.* 223 (1946), p. 286, n° 36. — (<sup>2</sup>) *Ann. Chim.*, n° 163. — (<sup>3</sup>) \*Bibl. 568g, n° 45 ('36).

Z. — Butyr. B (166,4; 4,05), f. [5 : 0,2]; diacét. glycol (186,3; 15,85), f.; sulfate M (189,1; 18,65), f. — Isoval. B (177,6; 7,15), m. [95 : 0,3]; oxal. É (185,65; 15,2), m. [80 : 1,8]; carbon. i. B (190,3; 19,85). — Prop. i. A (160,7; 9,75), l.; butyr. i. A (181,05; 10,6), l. [95 : 0,1]. — Isoval. i. A (192,7; 22,25), idéale.

OXYDE D'ISOAMYLE (173,2)

Oxal. M [dène]	164,45	8,75	154,8	9,65	46	ξ <sub>c</sub> 51,5	( <sup>1</sup> )	[42]
Diacét. éthyli-	168,5	4,7	161,5	7,0	43	50 : 3,9	( <sup>2</sup> )	[43]
Silicate É	168,8	4,4	<165,5	>3,3	—	—	—	[44]
Isovalér. i. B	171,2	2,0	170,95	0,25	10?	10 : 0,3	*561 n° 5	[45]
Acét. hexyle	171,5	1,7	171,2	0,3	<20	568g, n° 145	—	[46]
Malonate M	181,4	8,2	165,5	7,7	65	80 : 1,2	—	[47]
Oxalate d'É	185,65	12,45	170,15	3,05	71	50 : 3,8	( <sup>3</sup> )	[48]
Diacét. glycol	186,3	13,1	170,1	3,1	...	—	—	[49]
Carbon. i. B	190,3	17,1	<172,5	>0,7	—	—	—	[50]
Fumarate M	193,25	20,05	172,35	0,85	84	ξ <sub>c</sub> 72	( <sup>4</sup> )	[51]
Succinate M	195,5	22,3	<172,5	>0,7	—	—	—	[52]

(<sup>1</sup>) *C. R. Ac. Sc.* 222 (1946), p. 882, n° 12. — (<sup>2</sup>) *Ann. Chim.* (l. c.), n° 164. — (<sup>3</sup>) *Ann. Chim.*, n° 505. — (<sup>4</sup>) *Ann. Chim.*, n° 284.

Z. — Isovalér. B (177,6; 4,4), f. [90 : 0,3?]. — Butyr. B (166,4; 6,8), m. [6 : 0,2]; hexoate É (167,7; 5,5), m.; butyr. i. A (181,05; 7,85), m. — Prop. i. A (160,7; 12,5), l. — Isoval. i. A (192,7; 19,5), t. l. — Acét. phényle (195,7; 22,5), idéale.



CINÉOLE (176,35)

Oxal. M. [dène	164,45	11,9	158,85	5,6	45	Σ46,8	*550, n° 6	[53]
Diacét. éthyli-	168,5	7,85	164,95	3,55	34	42 : 1,2	—	[54]
Isovalér. B	177,6	1,25	<176,2	>0,15	<75	...	—	[55]
Malonate M	181,4	5,05	169,1	7,25	59,5	73 : 3,7	549, n° 27	[56]
Oxal. É [tyle	185,65	9,3	173,5	2,85	72	87 : 1,6	( <sup>1</sup> )	[57]
Carbon. isobu-	190,3	13,95	<176,0	>0,35	<82	—	—	[58]
Fumarate M	193,25	16,9	175,75	0,6	85	Σ70	( <sup>2</sup> )	[59]
Succinate M	195,5	19,15	<176,0	>0,35	<95	95 : 1,2	( <sup>3</sup> )	[60]

(<sup>1</sup>) Bibl. 556, n° 94; *Ann. Chim.* (l.c.), n° 506. — (<sup>2</sup>) *C. R. Ac. Sc.* 222 (1946), p. 882, n° 13. — (<sup>3</sup>) \*Bibl. 568g, n° 53 ('36).

Z. — Isobut. i. A (169,8; 6,55), l. [90 : 0,1]; isovalér. i. B (171,2; 5,15), l. [50 : — 0,2 ∞]; acét. hexyle (171,5; 4,85), l. [95 : 0,2]; butyr. i. A (181,05; 4,7), l. [73 : 0,1]. — Hexoate É (167,7; 8,65), t. l. — Prop. i. A (160,7; 15,65), idéale [5 : 0,1]; butyr. B (166,4; 9,95), idéale [95 : 0,0]. — Isoval. i. A (192,7; 16,35), t. l. n.; acét. phényle (195,7; 19,35), t. l. n.

OXYDE DE MÉTHYLE ET DE *p*-CRÉSYLE (177,05)  
(*p*-crésolméthyléther)

Diacét. éthyli-	168,5	8,55	<168,3	>0,2	<38	—	—	[61]
Isoval. B [dène	177,6	0,55	176,4	0,65	58	60 : 0,9	( <sup>1</sup> )	[62]
Malonate M	181,4	4,35	<174,8	>2,25	60?	72 : 1,8	( <sup>2</sup> )	[63]
Oxalate É	185,65	8,6	<176,3	>0,75	—	—	—	[64]

(<sup>1</sup>) \*Bibl. 568g, n° 77 ('36). — (<sup>2</sup>) \*Bibl. 568g, n° 77a.

Z. — Butyr. i. A (181,05; 4,0), f.; fumar. M (193,25; 16,2), f. (*Ann. Ch.*, l. c., p. 175). — Succin. M (195,5; 18,45), m. — Isobut. i. A (169,8; 7,25), l. — Butyr. B (166,4; 10,65), t. l.; isoval. i. B (171,2; 5,85), t. (?) l. [10 : 0,4 ∞]. — Prop. i. A (160,7; 16,35), idéale; isoval. i. A (192,7; 14,65), idéale.

OXYDE D'ÉTHYLE ET DE BENZYLE (185,0)  
(Benzyléthyléther)

Malonate M	181,4	3,6	178,0	3,4	63	—	o. s.	[65]
Oxalate d'É	185,65	0,65	<181,8	>3,2	>50	<i>Ann. Chim.</i> , n° 507	—	[66]
Diacét. glycol	186,3	1,3	<181,2	>3,8	—	—	—	[67]
Sulfate M	189,1	4,1	<182,8	>2,2	>53	—	o. s.	[68]
Fumarate M	193,25	8,25	183,5	1,5	68	<i>Ann. Chim.</i> , n° 285	—	[69]

Z. — Butyr. i. A (181,05; 3,95), f.; malon. É (199,35; 14,35), f. — Isoval. B (177,6; 7,4), l.; isoval. i. A (192,7; 7,7), l.; acét. phényle (195,7; 10,7), l. — Benz. M (199,4; 14,4), ∞ idéale.

OXYDE D'AMYLE *n* (187,5)

Malonate M	181,4	6,1	<175,0	>6,4	>38	—	—	[70]
Oxalate d'É	185,65	1,85	177,7	7,95	46	50 : 3,9	( <sup>1</sup> )	[71]
Diacét. éthylène	186,3	1,2	<179,0	>7,3	>40	—	—	[72]

(<sup>1</sup>) *Ann. Chim.*, (l. c.), n° 508.

Z. — Butyr. i. A (181,05; 6,45), m. — Isoval. B (177,6; 9,9), t. l. — Isoval. i. B (171,2; 16,3), ∞ idéale.

OXYDE DE MÉTHYLE ET D'ISOBORNYLE (192,4)

Malonate M	181,4	11,0	<177,5	>3,9	>10	—	—	[73]
Oxalate d'É	185,65	6,75	181,15	4,15	12?	*542 ('18), n°1864	—	[74]
Diacét. glycol	186,3	6,1	<183,5	>2,8	>18	—	—	[75]
Sulfate M	189,1	3,3	<185,5	>3,6	>30	*542 ('18), n°1865	—	[76]
Isovalér. i. A	192,7	0,3	<192,0	>0,4	>45	—	—	[77]
Fumarate M	193,25	0,85	185,5	6,9	52	Ann. Ch., n° 286	—	[78]
Succinate M	195,5	3,1	186,4	6,0	—	—	o. s.	[79]

Z. — Acét. phényle (195,7; 3,3), f. — Butyr. i. A (181,05; 11,35), ∞ idéale.

OXYDE D'ÉTHYLE ET D'ISOBORNYLE (203,8)

Fumarate M	193,25	10,55	<191,5	>1,75	>19	—	F	[80]
Succinate M	195,5	8,3	193,0	2,5	25	—	—	[81]
Malonate É	199,35	4,45	<196,2	>3,15	>30	—	o. s.	[82]
Maléate M	204,05	0,25	<197,8	>6,25	—	—	—	[83]

Z. — Oxal. É (185,65; 18,15), t. f. — Acét. phényle (195,7; 8,1), l. — Isoval. i. A (192,7; 11,1), t. l.

OXYDE D'ÉTHYLE ET DE BORNYLE (204,9)

Fumarate M	193,25	11,65	191,2	2,05	20	—	F	[84]
Malonate É	199,35	5,55	<196,0	>3,35	>29	—	—	[85]

Z. — Acét. phényle (195,7; 9,2), l. — Isoval. i. A (192,7; 12,2) ∞ idéale.

VÉRATROL (206,8)

Maléate méthyl	204,05	2,75	<200,9	>3,15	—	—	—	[86]
Fumarate É	217,85	11,05	<205,9	>0,9	>69	—	—	[87]

Z. — Malon. M (181,4; 25,4), f.; oxal. É (185,65; 21,15), f.; diacét. glycol (186,3; 20,5), f. — Benz. M (199,4; 7,4), m. (?) [10 : 0,3]; benz. É (212,5; 5,7), m. (?) [90 : 0,2]; acét. benzyle (215,0; 8,2), m. — Acét. phényle (195,7; 11,1), t. l. [5 : 0,0]. — Isoval. i. A (192,7; 14,1), idéale.

MÉTHYLAL ISOAMYLIQUE (210,8)

Benzoate d'É	212,5	1,7	<210,6	>0,2	85?	44 : 0,9	( <sup>1</sup> )	[88]
Succinate É	217,25	6,45	<210,4	>0,4	...	—	—	[89]

(<sup>1</sup>) \*Bibl. 542, n° 1867 ('18).

Z. — Malon. É (199,35; 11,45), f.; acét. benzyle (215,0; 4,2), f. — Benz. M. (199,4; 11,4), l. — Acét. phényle (195,7; 15,1), t. l.

ÉTHER DIMÉTHYLIQUE DU RÉSORCINOL (214,7)

Maléate méthyl	204,05	10,65	<202,8	>1,25	<45	—	—	[90]
Benzoate É	212,5	2,2	<212,35	>0,15	...	—	—	[91]
Fumarate É	217,85	3,15	211,2	3,5	Données approximatives.	—	—	[92]

Z. — Malon. É (199,35; 25,35), f. (?). — Form. benzyle (203,0; 11,7), l. — Acét. bornyle (227,6; 12,9), ∞ idéale.

ESTRAGOL (ISOANÉTHOL) (\*215,6, légèr<sup>t</sup> dissocié)

Z. — Maléate M. (204,05; > 11,65), f.; benz. É (212,5; > 3,1), f.

OXYDE DE MÉTHYLE ET D'α-TERPÉNYLE (216,2)  
(éther méthylique du terpinéol-α)

Benzoate É	212,5	3,7	<212,3	>0,3	>22	50 : 1,0	(1)	[93]
Acét. benzyle	215,0	1,2	214,7	0,3	28	—	o. s.	[94]
Succinate É	217,35	1,05	<212,0	>4,2	52?	...	(2)	[95]
Fumarate É	217,85	1,65	209,5	6,7	57	—	o. s.	[96]

(1) \*Bibl. 542, n° 1869 ('18). — (2) \*Bibl. 542, n° 1870.

Z. — Malon. É (199,35; 16,85), f. — Octoate É (207,0; 9,2), l. p.; acét. bornyle (227,6; 11,4), l.

ÉTHER MÉTHYLIQUE DU THYMOL (216,5)

Fumarate É	217,35	1,35	<212,8	>2,7	—	—	—	[97]
------------	--------	------	--------	------	---	---	---	------

Z. — Malon. É (199,35; 17,15), f. — Maléate M (204,05; 12,45), l.; acét. bornyle (227,6; 11,1), l. — Form. benzyle (203,0; 13,5), t. l.; phénylacét. É (228,75; 12,25), t. l. — Benz. M (199,4; 17,1), ∞ idéale.

ÉTHER DIÉTHYLIQUE DU RÉSORCINOL (235,0)

Carbonate i. A	232,2	2,8	<231,0	>1,2	>33	—	—	[98]
----------------	-------	-----	--------	------	-----	---	---	------

Z. — Fumar. É (217,85; 17,15), f. — Acét. bornyle (227,6; 7,4), m.; phénylacét. É (228,75; 6,25), m.; benz. i. B (241,9; 6,9), m.

ANÉTHOLE (235,7)

Z. — Benz. P (230,85; 4,85), t. f. — Maléate É (223,3; 12,4), f. — Benz. i. B (241,9; 6,2), m. — Fumar. É (217,85; 17,85), l.

SAFROLE (235,9)

Carbon. i. A	232,2	3,7	<231,8	>0,4	—	—	—	[99]
--------------	-------	-----	--------	------	---	---	---	------

Z. — Benz. P (230,85; 5,05), f. [7 : 0,1] [\*Bibl. 549, n° 120]. — Maléate É (223,3; 12,6), m.; benz. i. B (241,9; 6,0), m. [89 : 0,4] [\*Bibl. 556, n° 133]; succin. P (250,5; 14,6), m. — Succin. É. (217,25; 18,65), l.; fumar. É (217,85; 18,05), l.; acét. born. (227,6; 7,7), l. [3 : 0,0]; phénylacét. É (228,75; 7,15), l. [5 : 0,1]; phénylprop. É (248,1; 12,2), l.; benz. B (249,0; 13,1), l.

ISOSAFROLE β (252,0)

Succinate P	250,5 ∞	1,5 ∞	<249,0	>1,5	<70	—	—	[100]
Borate isoamy.	255,—	3,0 ∞	<250,8	>1,2	Perturbé par réact.	—	—	[101]

Z. — Benz. B (249,0; 3,0), q.-az. [10 : 0,3] [Bibl. 568g, n° 182]. — Oxal. i. A (268,0; 16,0), f. — Benz. i. B (241,9; 10,1), m. [5 : 0,1]; cinnam. M (261,9; 9,9), m. (?); benz. i. A (262,0; 10,0), m. [95 : 0,0].

OXYDE DE MÉTHYLE ET D'EUGÉNYLE (254,7)

Z. — Benz. B (249,0; 5,7), t. l. (?) [5 : 0,1]. — Benz. i. B (241,9; 12,8), ∞ idéale [5 : 0,1]; cinnam. M (261,9; 7,2), ∞ idéale [Bibl. 554, n° 159], benz. i. A (262,0; 7,3), ∞ idéale [95 : 0,1].

OXYDE DE PHÉNYLE (259,0)

Succinate P	250,5 ∞	8,5 ∞	<250,0	>0,5	—	—	—	[102]
Cinnamate M	261,9	2,9	258,8	0,2	83?	* 570, n° 126	—	[103]
Benzoate i. A.	262,0	3,0	258,9	0,1	90	ξ <sub>c</sub> 23,5	(1)	[104]

(1) \*Bibl. 571, n° 79.

Z. — Phtal. M (283,2; 24,2), f. (?). — Phtal. É (298,5; 39,5), m. (?). — Phényl prop. É (248,1; 10,9), l.; benz. B (249,0; 10,0), l.; cinnam. É (272,0; 13,0), l.

OXYDE DE MÉTHYLE ET D'ISOEUGÉNYLE (270,5)  
(Isoeugénolméthyléther)

Z. — Oxal. i. A (268,0; 2,5), q.-az. — Cinnam. É (272,0; 1,5), f.; phtal. M (283,2; 12,7), f (?). — Cinnam. M (261,9; 8,6), ∞ idéale [Bibl. 551, n° 131]; benz. i. A (262,0; 8,5), ∞ idéale [5 : 0,1].

OXYDE DE PHÉNYLE ET DE BENZYLE (286,5)

Phtalate M | 283,2 | 3,3 | < 282,5 | > 0,7 | — | — | F | [105]

OXYDE DE BENZYLE (297,-)

Z. — Phtal. M (283,2; 14,-), f. — Benz. phényle (315,-; 18,-), ∞ idéale.

29 octobre 1947.

Uccle-Bruxelles,  
Laboratoire privé de l'auteur.



# TABLE DES MATIÈRES

## Tome 61, Série I

Session du 30 janvier 1947, à Bruxelles.	PAGES
<b>PREMIÈRE SECTION : Sciences mathématiques et astronomiques ...</b>	<b>4</b>
Résolution d'un système de trois équations linéaires à trois inconnues par un diagramme triangulaire. — Note de M. P. de Béthune .....	4
Sur la géométrie récente du tétraèdre, par M. V. Thébaud .....	12
Sur une méthode d'intégration par approximations successives des équations différentielles de forme normale, par M. R. H. J. Germau .....	18
La dioptrie d'Archimède, par M. Albert Lejeune .....	27
<b>DEUXIÈME SECTION : Physique et Chimie .....</b>	<b>48</b>
Sur l'éclaircissement produit par un système optique centré et entaché d'aberration sphérique dans le voisinage d'un point image, par M. A. Biot .	48
Spectres infra-rouges des halogénures de méthyle	
II. Vibrations fondamentales des halogénures partiellement deutérés (Radical $\text{CHD}_2\text{-CHD}_2$ ), par M. Ch. Courtois .....	55
Anharmonicité de la vibration de valence O-H, O-D des alcools méthyliques, par M. Ch. Courtois .....	66
Quelques Azéotropes dont un constituant est hétérocyclique azoté, par M. M. Lecat .....	73
Azéotropes des Nitrodérivés, par M. M. Lecat .....	79
Session du jeudi 24 avril 1947, à Bruxelles.	
<b>PREMIÈRE SECTION : Sciences mathématiques et astronomiques ...</b>	<b>99</b>
Sur l'élimination des paramètres dans la méthode des caractéristiques de Cauchy pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, par M. R. H. J. Germau .....	99
Interpolation dans la méthode de Runge-Kutta, par M. G. Lemaître ...	106
Sur les tétraèdres orthologiques, par M. V. Thébaud .....	112
Anneaux finis; systèmes hypercomplexes de rang deux sur un corps, par M. R. Ballieu .....	117
<b>DEUXIÈME SECTION : Physique et Chimie .....</b>	<b>127</b>
Sur la correction de largeur des fentes dans les mesures au spectrophotomètre, par M. A. Biot .....	127
Sur l'absorption du baume du Canada dans le spectre visible, par M. A. Biot	136
Spectres d'absorption infra-rouges des alcools méthyliques $\text{CH}_3\text{OH}$ , $\text{CH}_3\text{OD}$ , $\text{CD}_3\text{OH}$ et $\text{CD}_3\text{OD}$ , liquides et vapeurs, par M. Ch. Courtois .....	139

Azéotropes de sulfures confrontés avec des azéotropes d'halogénures, par M. M. Lecat .....	148
Azéotropes d'oxydes, par M. M. Lecat .....	153
Recherches sur la tension limite d'entraînement des matériaux constitutifs du lit, par M. L. J. Tison .....	163

Session du jeudi 30 octobre 1947 à Louvain.

<b>PREMIÈRE SECTION : Sciences mathématiques et astronomiques ...</b>	<b>185</b>
Sur une méthode d'approximations successives pour l'intégration des systèmes normaux d'équations intégral-différentielles, par M. R. H. Germy .....	185
Sur les équations intégrales dont le noyau est une fonction $K_n$ de Bessel, par M. Louis Poli .....	191
Équations intégrales et équations fonctionnelles, par M. M. Parodi ....	198
Sur un théorème d'existence et d'unicité de l'intégrale d'une équation différentielle linéaire, par M. Félix Alardin .....	205
Sur le premier point de Lemoine du tétraèdre, par M. V. Thébault ....	215
Anneaux finis : Systèmes hypercomplexes de rang trois sur un corps commutatif, par M. Robert Ballieu .....	222
Sur la récession des nébuleuses extragalactiques, par M. P. Drumaux ..	228
Les définitions dans l'Ancienne Sphérique, par J. Mogenet .....	235
<b>DEUXIÈME SECTION : Physique et Chimie .....</b>	<b>242</b>
Sur la précision et l'emploi des filtres colorés et spécialement sur les filtres en gélatine, par M. A. Biot .....	242
Note sur la mesure de l'activité de préparations radio-actives, par MM. G. Guében, J. Govaerts et A. D. Stoppani .....	250
Azéotropes d'esters et d'oxydes, par M. Maurice Lecat .....	255

## AUTEURS

F. Alardin, 205. — R. Ballieu, 117, 222. — P. de Béthune, 4. — A. Biot, 48, 127, 136, 242. — Ch. Courtoy, 55, 66, 139. — P. Drumaux, 228. — R. H. J. Germy, 18, 99, 185. — J. Govaerts, 250. — G. Guében, 250. — M. Lecat, 73, 79, 148, 153, 255. — A. Lejeune, 27. — G. Lemaître, 106. — J. Mogenet, 235. — M. Parodi, 198. — L. Poli, 191. — A. D. Stoppani, 250. — V. Thébault, 12, 112, 215. — L. J. Tison, 163.

## DATES DE PUBLICATION

1<sup>er</sup> fascicule : pp. 1 à 98, 4 avril 1947.  
 2<sup>e</sup> » : pp. 99 à 184 : 2 juin 1947.  
 3<sup>e</sup> » : pp. 185 à 264 : 12 décembre 1947.



## Revue des Questions Scientifiques

Cette revue, fondée en 1877 par la Société scientifique de Bruxelles, se compose actuellement de cinq séries : la **première série** comprend 30 volumes (1877-1891) ; la **deuxième**, 20 volumes (1892-1901) ; la **troisième**, 30 volumes (1902-1921) ; la **quatrième**, 30 vol. (1922-1936). La livraison de janvier 1937 inaugure la **cinquième série**.

La revue fut interrompue par la guerre, après le deuxième fascicule, avril 1940, du tome 117 de la collection. Ce tome fut achevé par les fascicules de février et juillet 1946.

Chaque année paraît un tome, en quatre fascicules d'environ 160 pages chacun : 20 janvier, 20 avril, 20 juillet, 20 octobre.

Depuis 1947 la Revue est aussi l'organe de l'UNION CATHOLIQUE DES SCIENTIFIQUES FRANÇAIS.

*Administration et Rédaction : 11, rue des Récollets, Louvain (Belgique.)*

### PRIX D'ABONNEMENT :

Belgique, Congo belge et Grand-Duché de Luxembourg	200 francs belges
France et colonies françaises (s'adresser au Centre du Livre français, 1, rue de la Visitation, Paris 7 <sup>e</sup> ) . . .	500 francs franç.
Suisse (s'adresser à la Librairie de l'Université, 6, rue Haldimand, Lausanne). . . . .	28 francs suisses
Canada (s'adresser aux Messageries France-Canada, 5466, avenue du Parc, Montréal 8) . . . . .	6 dollars 50 .
Autres pays (s'adresser au Secrétariat, à Louvain) . . . .	280 francs belges



# PUBLICATIONS DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

## EXTRAIT DU CATALOGUE

**ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES**, t. I à t. XLVI, 1875 à 1926. Chaque vol. in-8° de 400 à 600 pages fr. 100,00

### **TABLES ANALYTIQUES DES ANNALES,**

t. I à XXV (1875 à 1901) . . . . . fr. 20,00  
t. XXVI à XLVI (1902 à 1926) . . . . . fr. 40,00

### **ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES,**

Série A (sc. mathématiques), t. XLVII à t. LVI (1927 à 1936) fr. 70,00

Série B (sc. physiques et naturelles) » fr. 70,00

Série C (sc. médicales) (1927 et 1928) fr. 100,00 — (1929 à 1933) fr. 40,00  
(1934 à 1936) fr. 20,00

Série D (sc. économ. et techniques) (1927 à 1929) fr. 20,00 — (1930) fr. 60,00  
(1931 à 1936) fr. 100,00

Série I (sc. mathématiques et physiques), tt. LVII à LXI (1937 à 1947) fr. 70,00

Série II (sc. naturelles et médicales), tt. LVII à LX (1937 à 1940,46) fr. 70,00

Série III (sc. économiques), tt. LVII à LIX (1937 à 1940,46) fr. 100,00

### **REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES,**

t. I à XCII (1877 à 1927). Les deux volumes annuels. . . . . fr. 120,00

Le fascicule trimestriel . . . . . fr. 34,00

t. XCIII à CXVI (1928 à 1939). Les deux volumes annuels . . . . . fr. 160,00

Le fascicule . . . . . fr. 28,00

t. CXVII (1940 et 1946), t. CXVIII (1947). Le volume . . . . . fr. 200,00

### **TABLES ANALYTIQUES DE LA REVUE,**

t. I à L (1877 à 1901) . . . . . fr. 20,00

t. LI à LXXX (1902 à 1921) . . . . . fr. 20,00

t. LXXXI à CX (1922 à 1936) . . . . . fr. 30,00

### **MONOGRAPHIES DE SCIENCES NATURELLES**

I. — **B. Tougarinoff**. Les réactions organiques dans l'analyse qualitative minérale (cations). — Un vol. in-8° de 107 pages (1930) : . . . . . fr. 24,00

II. — **V. Schaffers**. Le paratounerre et ses progrès récents. Un vol. in-8° de 90 pages (1931) : . . . . . fr. 24,00

IV. — **F. Kaisin et E. de Pierpont**. Hydrogéologie des Calcaires de la Belgique. Un vol. in-8° de 111 pages, avec 35 fig. et un plan hors-texte (1939) : en Belgique, fr. 24,00 (épuisé) ; autres pays, fr. 30,00.

### **MONOGRAPHIES MÉDICALES**

I. — **M. Schillings**. Le rein en fer à cheval. Un vol. in-8° de 104 pages, avec 8 planches hors-texte (1928) : . . . . . fr. 70,00  
autres pays, 90,00 fr.

III. — **P. Van Gehuchten**. La pathologie du système pallido-strié. Un vol. in-8° de 52 pages, avec 8 planches hors-texte (1930) : . . . . . fr. 24,00  
autres pays, fr. 30,00.

### **MONOGRAPHIES DES SCIENCES ÉCONOMIQUES**

I. — **A. Henry**. La structure technique de l'agriculture belge et ses particularités en Wallonie et en Flandre. Un vol. de 66 pages . . . . . fr. 20,00

II. — **A. Henry**. Les variations régionales de l'Agriculture en Belgique. Un vol. de 50 pages . . . . . fr. 10,00

III. — **A. Delperée**. La réglementation conventionnelle des conditions de travail en Belgique. Un vol. de 200 pages . . . . . fr. 60,00